

**АЛТАЕВА АЙЖАН БАКАТКАЛИЕВНА**

**Реттелінген құрылымдар үшін бинарлылық және саналымды  
категориялықтың нұсқалары**

«8D05404 - Іргелі және қолданбалы математика»  
білім беру бағдарламасы бойынша

Диссертация философия докторы ғылыми дәрежесін  
алуға қажетті талаптарға сәйкес ұсынылады  
(PhD)

Отандық ғылыми жетекші:

Күлпешов Б.Ш.

Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор

ҚР ҰҒА корреспондент-мүшесі,

КБТУ профессоры

Шетелдік ғылыми жетекші:

Судоплатов С.В.

Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор,

РҒА С.Б. математика институтының директоры орынбасары,

Новосібір, Ресей

Қазақстан Республикасы

Алматы, 2024

## МАЗМҰНЫ

|                                                                                                                           |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Нормативтік сілтемелер .....</b>                                                                                       | <b>3</b>  |
| <b>Белгілер мен қысқартулар .....</b>                                                                                     | <b>4</b>  |
| <b>Анықтамалар .....</b>                                                                                                  | <b>5</b>  |
| <b>Кіріспе .....</b>                                                                                                      | <b>9</b>  |
| <b>1 Әлсіз о-минималды теориялардың дерлік омега-категориясы туралы.....</b>                                              | <b>14</b> |
| 1.1 Алдын ала мәліметтер .....                                                                                            | 14        |
| 1.2 Негізгі теорема .....                                                                                                 | 17        |
| <b>2 Омега-категориялық дерлік әбден о-минималды теориялардың бинарлығы .....</b>                                         | <b>23</b> |
| 2.1 2-формулалардың әрекеті.....                                                                                          | 23        |
| 2.2 Ортогональдылық.....                                                                                                  | 25        |
| 2.3 Бинарлылық .....                                                                                                      | 30        |
| <b>3 Омега-категориялық дерлік әлсіз о-минималды теориялар үшін бинарлы оқшаулау формулаларының таралу алгебрасы.....</b> | <b>36</b> |
| 3.1 1-типке арналған формулалар алгебрасы.....                                                                            | 36        |
| 3.2 Әлсіз ортогональды емес 1-типтер.....                                                                                 | 43        |
| 3.3 1-типті жиындарға арналған формулалар алгебрасы .....                                                                 | 49        |
| <b>4 Саналымды категориялық әлсіз циклдік минималды құрылымдардағы бинарлы формулалар .....</b>                           | <b>58</b> |
| 4.1 Алдын ала мәлімет .....                                                                                               | 58        |
| 4.2 Дөңестік дәрежесі 1 саналымды категориялық әлсіз циклдік минималды n-дөңес дерлік бинарлы теориясы.....               | 63        |
| <b>5 Саналымды категориялық әлсіз циклдік минималды құрылымдардың дерлік бинарлығы туралы .....</b>                       | <b>75</b> |
| 5.1 Жиында типті жүзеге асырудағы функцияның әрекеті.....                                                                 | 77        |
| 5.2 Ортогоналдылық .....                                                                                                  | 80        |
| 5.3 Негізгі теорема .....                                                                                                 | 86        |
| <b>6 Саналымды категориялық сызықтық тәртіптің E комбинациясы..</b>                                                       | <b>91</b> |
| <b>Қорытынды .....</b>                                                                                                    | <b>97</b> |
| <b>Пайдаланылған дереккөздер тізімі .....</b>                                                                             | <b>99</b> |

## **НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР**

Бұл диссертацияда төмендегі стандарттарға сілтемелер қолданылды:

ҚР МЖМБС 5.04.034-2011. Қазақстан Республикасының мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Жоғары оқу орнынан кейінгі білім беру. Докторантура. Негізгі ережелер;

МЕМСТ 7.1-2003. Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама. Жалпы талаптары мен құрастыру ережелері;

МЕМСТ 7.32-2017. Ғылыми-зерттеу жұмысы туралы есеп. Құрылымы және пішімдеу ережелері.

## БЕЛГІЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \dots$  - индекстер мен құрылымдар,  
 $M, N, \dots$  - тасымалдаушы құрылымдар,  
 $a, b, \dots$  - құрылым немесе жиын элементтері,  
 $\Leftrightarrow$  – эквивалентті,  
 $\bar{a}$  – кортеж  $(a_1, \dots, a_n)$  ,  
 $\emptyset$  – бос жиын,  
 $\mathbb{Q}$  – рационалды сандар жиыны,  
 $A \subseteq B$  немесе  $B \supseteq A$  –  $A$  жиыны  $B$  жиынының ішкі жиыны,  
 $A \cup B$  –  $A$  және  $B$  жиындарының бірігуі,  
 $A \cap B$  –  $A$  және  $B$  жиындарының қиылысы,  
 $A \setminus B$  – тек  $A$  жиынына тиесілі элементтер жиыны,  
 $a \in A$  –  $a$  элементі  $A$  жиынына тиесілі,  
 $|A|$  –  $A$  жиынының қуаты,  
 $b < A - a \in A$  үшін,  $b < a$ ,  
 $A < b - a \in A$  үшін,  $a < b$ ,  
 $p, q, \dots$  – толық типтер,  
 $p(\mathfrak{M})$  –  $\mathfrak{M}$  құрылымындағы  $p$  типті жүзеге асыру жиыны,  
 $tp(\alpha|A)$  –  $A$  жиынының үстіндегі  $\alpha$  элементін анықтайтын тип ( $A$  жиынының параметрлерімен),  
 $\alpha \models p$  –  $\alpha$  элементі  $p$  типін жүзеге асырады,  
 $S_n(A)$  –  $A$ -жиынындағы  $n$  -типтерінің жиыны,  
 $f, g, \dots$  – көрсетулер немесе функциялар,  
 $\forall, \exists$  – жалпылық және бар болу кванторлары,  
 $\mathfrak{M} \models \phi(\bar{a}) - \phi(\bar{x})$  формуласы  $\bar{a}$  кортежі бойынша  $\mathfrak{M}$  құрылымында ақиқат,  
 $I(T, \omega)$  –  $T$  теориясында саналымды модельдер саны,  
 $\perp^a$  – ортогоналдылықтың дерлік қатынасы,  
 $\neg \perp^a$  – ортогоналдылықтың дерлік емес қатынасы,  
 $\neg \perp^w$  – әлсіз емес ортогоналдылық қатынасы.

## АНЫҚТАМАЛАР

Диссертацияның мәтінінде келесі анықтамалар қолданылады :

**$\mathcal{L}$  тілі** деп :

- 1) әрбір  $f \in \mathcal{F}$  үшін  $\mathcal{F}$  функцияналды жиындар символы және  $n_f$  бүтін оң сандар жиынын;
- 2) әрбір  $R \in \mathcal{R}$  үшін  $\mathcal{R}$  функцияналды жиындар символы және  $n_R$  бүтін оң сандар жиынын;
- 3)  $\mathcal{C}$  константалы символдар жиынын атаймыз.

$n_f$  және  $n_R$  сандары  $n_f$  айнымалыларының  $f$  функциясын және  $n_R$ -жергілікті қатынасын көрсетеді.

**$\mathcal{L}$  құрылымды  $\mathfrak{M}$ :**

- 1)  $M$  бос емес жиынынан,
- 2) әрбір  $f \in \mathcal{F}$  үшін  $f^{\mathfrak{M}}: M^{n_f} \rightarrow M$  функцияларынан,
- 3) әрбір  $R \in \mathcal{R}$  үшін  $R^{\mathfrak{M}} \subseteq M^{n_R}$  жиынынан,
- 4) әрбір  $c \in \mathcal{C}$  үшін  $c^{\mathfrak{M}} \in M$  элементтерінен тұрады.

Мұнда  $f^{\mathfrak{M}}$ ,  $R^{\mathfrak{M}}$  және  $c^{\mathfrak{M}}$   $f, R, c$  символдардың интерпретациясы ретінде қолданылады.

Термдер жиынында келесі шарттар орындалса:

- 1)  $c \in \mathcal{T}$ ,  $c \in \mathcal{C}$  константалы символы үшін;
- 2)  $i = 1, 2, \dots$  үшін  $v_i \in \mathcal{T}$  айнымалысының әрбір символы;
- 3)  $t_1, \dots, t_{n_f} \in \mathcal{T}$  және  $f \in \mathcal{F}$  болса, онда  $f(t_1, \dots, t_{n_f}) \in \mathcal{T}$  ең кіші  $\mathcal{T}$  жиыны болады.

- 1)  $t_1, t_2$  термдерінде  $t_1 = t_2$ ;
- 2) немесе  $R(t_1, \dots, t_{n_R})$ , мұнда  $R \in \mathcal{R}$  және  $t_1, \dots, t_{n_R}$  термдер, онда  $\phi$  атомдық формула деп аталады.

- 1) егер  $\phi \in \mathcal{W}$ , онда  $\neg\phi \in \mathcal{W}$ ;
- 2) егер  $\phi, \psi \in \mathcal{W}$  болса, онда  $(\phi \wedge \psi) \in \mathcal{W}$ ,  $(\phi \vee \psi) \in \mathcal{W}$ ;
- 3) егер  $\phi \in \mathcal{W}$ , онда  $\exists v_i \phi \in \mathcal{W}$  және  $\forall v_i \phi \in \mathcal{W}$  болса, онда

$\mathcal{L}$  - формулалар жиыны атомдық формулалардан тұратын ең кіші  $\mathcal{W}$  жиыны болады.

Формулада бос айнымалылар болмаса, оны **тұжырым** деп атаймыз.

Формулада  $\exists v_i$  және  $\forall v_i$  кванторлары болмаса, онда формула **кванторсыз** болады.

Теория деп кейбір аксиомалар жиынын айтамыз. Сонымен қатар, модельдер теориясында зерттеудің негізгі екі бағыты бар: белгілі бір құрылымның теориясын қарастыру немесе осы теорияның модельдерін қарастыру. Осыған байланысты теорияның екі түрлі түсінігі болады.

$\mathfrak{M} \models \phi$  шарты орындалатын,  $\mathcal{L}$ -тұжырымдар жиынын  $\mathfrak{M}$  толық теориясы деп атаймыз.

$\mathcal{L}$  тілі болсын.  $\mathcal{L}$  -тұжырымдарының жиынтығы  $T$  теориясының  $\mathcal{L}$  тілі болады. Егер  $\phi \in T$  барлық тұжырымдары үшін  $\mathfrak{M} \models \phi$  шарты орындалса, онда  $\mathfrak{M} - T$  теориясының моделі немесе  $\mathfrak{M} \models T$  болады.

Теориялардың дәйекті болуы маңызды. Егер кейбір  $\phi$  үшін  $\mathcal{L}$ -теориялы  $T$ - дан  $T \vdash (\phi \wedge \neg\phi)$  өрнегі алынбаса,  $\mathcal{L}$ -теориялы  $T$  - дәйекті деп аталады.

Теорияда квантордың жойылуы маңызды (әлсіз о-минималды теориялар жағдайы сияқты).

Егер  $m(A) \subseteq B$  ішкі жиынында  $m$   $M$ - нің өзара анық кескіні болса және де:

- 1) барлық  $R$  үшін  $R^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow R^{\mathfrak{N}}(m(a_1), \dots, m(a_n))$ ,
- 2) барлық  $f$  үшін  $m(f^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)) \Leftrightarrow f^{\mathfrak{N}}(m(a_1), \dots, m(a_n))$ ,
- 3) барлық  $c$  үшін  $m(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}}$

шарттарын қанағаттандырса, онда

$$m: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$$

**Мономорфизм** болады.

Кез келген  $F(x_1, \dots, x_n)$  формуласы және кез келген  $(a_1, \dots, a_n) \in A$  кортежі үшін

$$\mathfrak{M} \models F(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models F(m(a_1), \dots, m(a_n)),$$

орындалса, онда

$$m: M \rightarrow N$$

формуласын **элементарлы мономорфизм** дейміз.

Егер  $i_M: M \rightarrow N$  кескіндеу элементар мономорфизм болса  $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$  онда  $\mathfrak{M}$  жүйесі  $\mathfrak{N}$  жүйесінің элементарлы ішкі жүйесі, яғни  $\mathfrak{N} \restriction \mathfrak{M}$  –жүйесінің **элементар кеңейтілімі** болады. Егер қандай да бір  $F \in \mathcal{L}$  тұжырымы үшін  $\mathfrak{M} \models F \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models F$  орындалса, онда  $\mathfrak{M}$  және  $\mathfrak{N}$  **элементар эквивалент**  $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$  болады. Егер қандай да бір  $\phi$  формуласы үшін  $T \models \phi \leftrightarrow \psi$  орындалатын кванторсыз  $\psi$  формуласы бар болса, онда  $T$  теориясы кванторлардың қысқаруына (жоюына) жол береді.

$\mathfrak{M} = (M, \dots)$  –  $\mathcal{L}$  – құрылым болсын.  $X = \{\bar{a} \in M^n: \mathfrak{M} \models \phi(\bar{a}, \bar{b})\}$  орындалатындай  $\bar{b} \in M^m$  және  $\mathcal{L}$ -формула  $\phi(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m)$  бар болса ғана  $X \subseteq M^n$  ішкі жиыны **анықталатын** деп аталады. Онда  $\phi(\bar{v}, \bar{b})$  формуласы  $X$  – ті **анықтайды** деп айтамыз.

Сонымен қатар,  $X$  мәнін анықтайтындай,  $\phi(\bar{v}, w_1, \dots, w_l)$  және  $\bar{b} \in A^l$  формулалары бар болса,  $X$  жиыны  $A$  -анықталатын немесе  $A$  бойынша анықталатын деп аталады. Бұл жұмыстағы негізгі ұғымды төменде келтірілетін типтер туралы түсінігі береді.

$\mathfrak{M} = (M, \dots)$   $\mathcal{L}$ -құрылымы болсын,  $A \subseteq M$ .  $\mathcal{L}_A$  тілі - әрбір  $a \in A$  үшін  $\mathcal{L}$

тіліне константалы символдарды қосу арқылы алынған.

Бір бос  $x$  айнымалысы бар  $\mathcal{L}_A$ -формулалар жиыны 1-типті  $p(x)$  деп аталады, егер кез келген шекті  $p_0(x) \subseteq p(x)$  жиыны үшін  $\mathfrak{M} \models p_0(b)$  шарты орындалатындай,  $b \in M$  болса. Егер барлық  $\phi \in p$  үшін  $\mathfrak{M} \models \phi(\bar{a})$ ,  $p$ -формуласында  $A$  бойынша  $n$ -типі болса, онда  $\bar{a} \in M^n$  кортежі  $p$  типін жүзеге асырады.

Егер  $p$  типі  $\mathfrak{M}$  де жүзеге аспаса, онда  $\mathfrak{M}$   $p$  типін өткізіп жібереді.

Тип **оқшауланған** деп аталады ( $\varphi$  формуласымен), егер кез келген  $\theta(\bar{x}) \in p(\bar{x})$  формулалары үшін  $\mathfrak{M} \models \forall \bar{v}(\varphi(\bar{v}) \rightarrow \theta(\bar{v}))$  шарты орындалса.

$\mathfrak{M} \models T$  моделі  $T$  теориясында **қарапайым** модель деп аталады, егер  $\mathfrak{N} \models T$  бойынша  $\mathfrak{N}$  мен  $\mathfrak{M}$  арасында элементарлы бір-біріне кірістіру бар болса.

$T$  теориясының  $\mathfrak{M}$  моделі **біртекті** деп аталады, егер кез келген  $|A| < \kappa$  ішкі жиыны және кез келген  $b \in M$  үшін,  $f: A \rightarrow M$  элементар мономорфизмі болса, онда  $f$  функциясын  $f^*: A \cup \{b\} \rightarrow M$  дейін оны кеңейтуге болады, мұндағы  $f^*$  - бұл элементар мономорфизм.

$T$  теориясының  $\mathfrak{M}$  моделі **біртекті** деп аталады, егер  $|M|$  біртекті болатын болса.

$\kappa$  шексіз кардинал болсын.  $\mathfrak{M} \models T$  **қаныққан** деп аталады, егер барлық  $A \subseteq M$  үшін  $|A| = \kappa$  және  $p \in S_n^{\mathfrak{M}}(A)$  жағдайында  $p$   $\mathfrak{M}$  - де жүзеге асырылатын болса.

$T$  теориясында  $\mathfrak{M}$  моделі универсал деп болады, егер кез келген  $\mathfrak{N} \in \text{Mod}(T)$  моделі  $\mathfrak{M}$  моделіне элементарлы кіретін болса.

Құрылым **о-минималды** деп аталады, егер құрылымның кез келген анықталатын ішкі жиыны шекті интервалдар мен нүктелердің бірігуінен құралатын болса.

Жалпы теория **о-минималды** болады, егер теорияның барлық модельдері (немесе баламалы түрде мұндай модель бар болса) о-минималды болса,.

Құрылым **әлсіз о-минималды** деп аталады, егер құрылымның кез келген анықталатын ішкі жиыны дөңес жиындардың ақырлы санының бірігуінен құралатын болса.

Жалпы теория **әлсіз о-минималды** болады, егер теорияның барлық модельдері әлсіз о-минималды болса.

$A \subseteq M$ ,  $p, q \in S_1(A)$  болсын.  $p$  және  $q$  типтері **әлсіз ортогональды емес** деп аталады, егер  $(x) \cup q(y)$  толық 2 - типті болмаса, яғни  $\neg(p(x) \perp^w q(y))$ .  $q(y)$  типіндегі  $\alpha$  төңірек – төмендегі жиын:

$L_A$ -формуласы  $H(x)$ ,  $\gamma_1 < H(M) < \gamma_2$ ,  $\gamma \in H(M) \subset q(M)$  бар болатындай

$$V_q(\alpha) = \{\gamma \in q(M) \mid \exists \gamma_1, \gamma_2 \in q(M) \text{ анықталады.}\}$$

Кез келген  $A \subset M$  (міндетті түрде анықталмаған) үшін:

$$A^+ = \{\gamma \in M \mid \forall a \in A, \mathfrak{M} \models a < \gamma\},$$

$$A^- = \{\gamma \in M \mid \forall a \in A, \mathfrak{M} \models \gamma < a\}$$

анықтаймыз.

$A \subseteq M, p \in S_1(A)$  болсын. Егер  $U_p(x) \in p \quad U_p(M)^+ = p(M)^+$  болатындай  $U_p(x) \in p \quad L_A$  - дөңес формуласы бар болса, онда  $p$  **оңға квази рационал** болады.

Сол сияқты, егер  $U_p(x) \in p \quad U_p(M)^- = p(M)^-$  болатындай  $U_p(x) \in p \quad L_A$  - дөңес формуласы бар болса  $p$  **солға квази рационалды** болады. Егер  $p$  типі оң жақ немесе сол жақ квазирационалды болса, онда тип жалпы **квазирационалды** деп аталады.

Квазирационалды емес 1-тип **иррационал** деп аталады.

## КІРІСПЕ

**Жұмыстың жалпы сипаттамасы.** Диссертациялық жұмыс формальді тілдер және оның интерпретациясы немесе модельдер арасындағы қатынастарды зерттейтін математикалық логиканың ең басты салаларының бірі моделдер теориясымен байланысты. Біз басты назарымызды «классикалық моделдер теориясы» деп аталатын бірінші реттегі модельдер теориясына аударамыз.

**Зерттеудің өзектілігі.** Өз кезегінде стабильді немесе стабильді емес болып бөлінетін толық теория бірінші реттегі модельдер теориясының ең басты классикалық зерттеу нысаны болып табылады. Өткен ғасырдың алпысыншы жылдары модельдер теориясының стабильді теория саласы қарқынды дамыды, стабильді теория модельдерінің зерттелуінде көптеген ғылыми жаналықтар ашылды, нақты теоремалар алынды. Сонымен қатар өлшемдер теориясы, ортогональдылық, модулярлық, типтердың тереңдігі сияқты ең қызықты әрі жемісті идеялар мен әдістер формулалық жиынмен алынған қарапайым шектеулер стабильді теориясының ішкі класстары зерттелді.

Дәлірек айтқанда, А. Лахлан және Дж. Болдуинмен бірлескен [1] жұмысында алынған минималдылық түсінігі жоғарыдағы айтылған әдістерді алуға зор ықпалын тигізді. Сондай-ақ, стабильді емес класстың ішкі классы, сызықты реттелген құрылым - моделдер теориясы мамандарының көптеген жылдар бойы зерттеген маңызды салаларының бірі болды. Сызықты реттілік теориясын кеңейтетін, кейбір жеке теориялардың моделдерін зерттеу барысында айтарлықтай нәтижалар алынды. Пеано арифметикасын, абель группасының реттелген теориясын, нақты тұйық өрістің теориясын және сызықты реттілік теориясын зерттеуде де сәтті қадамдар жасалынды. Дегенмен моделдер теориясында, реттелген құрылымның жалпы теориясы көптеген жылдық зерттеудің нәтижесінде, 1984 жылы Ананд Пиллай және Чарльз Стейнхорнмен бірлесіп енгізілген о-минималдылық ұғымынан кейін ғана дами бастады (о-минимальдылық түсінігі Л. ван ден Дриестің [5] мақаласындағы о-минимальды байыту  $\langle R, < \rangle$  ұғымынан алынған). Еске салсақ, сызықты реттелген құрылым о-минималды деп аталады, егер оның кез келген формулалы ішкі жиыны интервалдар мен нүктелердің шекті бірігуінен тұратын болса. Қазіргі кезде, о-минималдылық ұғымы математикалық логиканың модельдер теориясында ғана емес, сонымен қатар аналитикалық және дифференциалдық геометрия, функцияналдар теориясында да дамып жатқаны белгілі. Бұл жерде Алекс Вилкидің [69] функциялар теориясы және геометриямен байланысты көрнекті нәтижесін атап өтпеу мүмкін емес, яғни саны шекті полиномиалды-экспоненциалды проекциялар қосымшасы және полиномиалды-экспоненциалды теңдіктер мен теңсіздіктердің тікелей проекциясы болатындығы, яғни нақты сандардың реттелген өрісін экспонентамен байытуында толық және о-минималды теориясы болады.

о-минималдылық жайлы жалпы библиография жүзден астам еңбекті қамтиды. Қазіргі уақытта о-минималды құрылымдарды зерттеу жалғасуда, мысалы Р.Раст және Д. Сахотаның о-минималды теориялар үшін изоморфизмнің борелдік

есепін зерттеуін атап өтуге болады [70].

Сонымен қатар, о-минималдылық түсінігі одан сайын түрлене түсті. Д. Макферсон, Д. Маркер және Ч. Стейнхорн әлсіз о-минималдылық ұғымын енгізіп, о-минималды реттелген өрістің нақты тұйық екенін көрсетті және о-минималдылықтың басқа да нұсқаларын қарастырды. О. Белеградек және басқа да ғалымдар квази о-минималдылық түсінігін енгізді. Осы модификацияларда қарастырылып отырған құрылымдардың сызықты реттелгендігі сақталған. Л.Невельски және Р. Венсель [11, 12] жұмыстарында о-минималды булевті реттелген құрылымдарды қарастырды, ол о-минималдылық ұғымын сызықтықтан бас тарта отырып өзгеріссіз қалдырды. Одан кейін А. Гласс, А. Макинтайер және Ф. Пуан [13] жұмысында тордағы реттелген группаларды қарастырды. Д. Макферсон және Б.Ш. Кулпешов [14] еңбегінде әлсіз циклдік минималдылықты циклдік реттелген жиындарда қарастырды.[15] Жұмысында енгізілген о-стабильділік (немесе реттелген стабильділік) ұғымы, о-минималдылықтың кеңейтілген қасиеттерін ашады, атап айтқанда, кез келген қиманың 1-типке дейін кеңейтімдерінің саны аз болады. Сонымен қатар, о-минималды құрылымдағы кез келген қима толық 1-типке дейін бірегей типке кеңейтілген, [16] жұмысында көрсетілгендей әлсіз о-минималды құрылымда ең көбі екі кеңейтімі болады. [17] Р.Клюкер мен Э.Линненг күрделі өрістер үшін о-минималдылықтың басқа түрлерін қарастырды. Қазіргі таңдағы атақты отандық ғалымымыз Қ.Ж. Құдайбергенов жартылай реттелген құрылымдар бойынша о-минималдылық ұғымын қарастырды [71]. Атап айталған тізім осы бағыттағы зерттеулердің толық нұсқасы емес, ол дегеніміз модельдер теориясында о-минималдылықтың әртүрлі нұсқаларын зерттеу жұмыстары одан әрі белсенді жүріп жатқанын көрсетеді, о-минималдылық және әлсіз о-минималдылық құрылымдары бойынша алынған бірқатар нәтижелерге қарамастан, бұл салада белсенді зерттеу жұмыстар жалғасуда. Мысалы, [19] жұмысында Р.Венсель әлсіз о-минималды құрылымдар үшін жасушалардың ыдырау қасиетін зерттесе, [20] жұмысында П.Дакино мен С.Кульман нақты тұйық өрістердің о-минималды байытылуын зерттеді. Жақында [21] жұмысында С.Мокония мен П.Танович әлсіз о-минималды теория түсінігін, кеңейтетін стационарлы реттелген теория түсінігін енгізді және бинарлы стационарлық реттелген теориялар үшін Воот гипотезасын растады. Бинарлы окшаулау формулаларының алгебралары, берілген теориялардың туынды нысаны болып табылады. Формулалардың өзара байланысын бинарлы деңгейде анықтауға, алгебралық терминдерде теориялық және модельдік нысандарды жіктеуге мүмкіндік береді. Бинарлы формулалардың алгебраларын жалпы С.В. Судоплатов пен И.В. Шулепов аксиоматизациялады; Б.Ш. Кулпешов, С.В. Судоплатов, Д.Ю. Емельянов [22] жұмысында саналымды категориялық әлсіз о-минималды теориялар үшін және [23] - да саналымды модельдердің аз саны бар толық о-минималды теорияларды сипаттады.

Қазіргі уақытта о-минималды құрылымдардың табиғаты мен ерекшелігін басқа да бағыттағы қолданысын ашатын көптеген маңызды нәтижелер алынуда. Мәселен, [24] жұмысында Б.С.Байжанов әлсіз о-минималды теорияның

жиынтығынан 1-типті классификациясын алған және әлсіз о-минималды теория моделін бір орындық дөңес предикатпен байыту мәселесін шешкен. [25] Жұмысында көрсетілгендей Р.Д.Арефьев әлсіз о-минималды құрылымдардың монотонды құрылымын дәлелденген. [26] мақаласында В.В.Вербовский әлсіз о-минималды теория болмайтын әлсіз о-минималды реттелген группаның мысалын жасаған.

Жалпы бұл диссертациялық жұмыста о-минималдылық ұғымын теориялық түрде зерттеуді жалғастырамыз. Диссертациялық жұмыста бинарлылық және дерлік омега-категориялық құрылым арасындағы өзара байланысқа ерекше көңіл бөлінеді. Сонымен қатар циклдік реттелген жиындар үшін о-минималдылықтың нұсқасы болатын әлсіз циклдік минималдылыққа ерекше назар аударылады. Жұмысты зерттеу барысында теориялар классының топология ерекшеліктері де қарастырылды. Операторлар арасындағы байланыстарды зерттеуге мүмкіндік беретін Р-оператор және Е-оператор ұғымдары енгізілді. Бұл операторлар қарастырылып отырған теорияларда жаңа теорияларды тудыруға мүмкіндік береді. Жұмыста орындау барысында туындайтын ең көп мән берілетін сұрақтар- сызықты реттелген құрылым және циклдік реттелген құрылым болып табылады. Кез келген сызықты реттелген құрылым  $\emptyset$ -анықталатын циклдік реттелген құрылым болып табылады және кез келген параметрдегі берілген циклдік реттелген құрылым үшін анықталатын сызықты реттілік болады. Әлсіз о-минималдылық пен әлсіз циклдік минималдылық арасында өте тығыз байланыс болады. Сонымен қатар, әлсіз циклді минималдылықты зерттеу үшін  $\emptyset$ -анықталатын жалпы екі ұғымның арасындағы айырмашылық та байқалады. Ұсынылған жұмыста дерлік бинарлылық және саналымды категориялық арасындағы байланыс кезінде туындайтын мәселелер де қарастырылады.

**Зерттеудің мақсаты:** о-минималдылық нұсқаларының жалпы құрылымдарының ерекшеліктерін зерттеу, яғни олар әлсіз о-минималдылық және әлсіз циклдік минималдылық болатынын анықтау. Дерлік омега категориялық әлсіз о-минималды теориялардың қасиеттерін қарастыру. Саналымды категориялық әлсіз циклді минималды теорияның ерекшеліктерін анықтау.

**Зерттеу есептері:** дерлік омега категориялық әбден о-минималды теорияларда алгебралық емес жұптық әлсіз ортогоналды ерікті ақырлы құрылымдарының ортогоналды 1- типтерінің ортогональдылық сұрақтарын анықтау.

Дерлік омега категориялық әбден о-минималды теориялардың бинарлығының мәселелерін қарастыру.

Саналымды моделі аз болатын ақырлы дөңес дәрежесінің әлсіз о-минималды теорияларының дерлік омега-категориясы туралы мәселені сипаттау.

Омега-категориялық дерлік әлсіз о-минималды теориялар үшін бос жиынның сыртында алгебралық емес 1-типті бинарлы оқшаулау формулаларының алгебрасын анықтау.

Дерлік бинарлы болатын, саналымды категориялық әлсіз циклді минималды  $m$ -дөңес, дөңестік дәрежесі 1 болатын теорияларды қарастыру.

Дөңестік дәрежесі ұғымында әлсіз циклді минималды 1-транзитивті емес саналымды категориялық дерлік бинарлылық мәселелерін зерттеу.

**Зерттеу нысаны** - әлсіз  $o$ -минималды ерекшелігі бар сызықты реттелген құрылымдар; әлсіз циклдік минималдылық қасиеті бар циклдік реттелген құрылымдар. Сонымен қатар: бинарлылық, дерлік  $\omega$ -категориялық немесе бинарлы дерлік теориялар; қарастырылатын класстың есептік-категориялық құрылымдарының сипаттамасы; бинарлы оқшаулау формулаларының таралу алгебрасын сипаттау; берілген алгебралардың коммутативтілігі немесе жалпылама коммутативтілігі сияқты құрылымдық қасиеттерін қарастыру.

**Зерттеу әдістері:** диссертацияда моделдер теориясының қарқынды дами бастаған кезеңінен, яғни 1980-ші жылдардан бастап келе жатқан модельдер теориясының классикалық әдістерін (атап айтқанда, бинарлы қатынастарды сызықтық реттілікпен келтіру) қолданамыз. Олардың ішінде  $o$ -минималдылық және әлсіз  $o$ -минималдылық нұсқалары сияқты теорияларға негізделген зерттеу әдістемесін атап өтуге болады. Сонымен қатар циклдік реттелген құрылым үшін  $o$ -минималдылық нұсқаларына келетін әлсіз циклдік минималдылық теориясын қолданамыз. Әлсіз  $o$ -минималдылық құрылымдарында саналымды категориялық бинарлылық критеріін көрсетеміз.

Диссертациялық жұмыста 2 формуланың реттілігі әдісін қолдана отырып  $r$  тұрақты дөңес оңға немесе солға бинарлы формулаларын қарастырамыз.  $R$  тұрақты формулаларды қолдана отырып саналымды категориялық әлсіз  $o$ -минималды құрылымды алгебралық емес 1 типтердің бинарлыққа дейінгі дәлдігін келтіреміз.

Зерттеу жұмысында ортогональдылық түсінігін, ауыстыру принципін қолданамыз.

Әлсіз циклді минималды теорияға мысалдар ұсынылады, олар арқылы саналымды категориялық әлсіз циклді минималды құрылымдары қарастырылады, бұл өте көрнекті теорияларды анық түсіндіретін әдістердің бірі болып табылады.

Аталғандардан басқа, соңғы 20 жылда зерттелген, реттелген құрылымдарды зерттеу әдістерін атап өтуге болады, мысалы, анықталатын унарлы функциялардың құрылымын талдау арқылы модельдерді сипаттау, дөңестік дәрежесі бойынша жүйелеу арқылы модельдерді зерттеу және т.б. әдістері қарастырылады.

**Ғылыми жаңалығы. Қорғауға ұсынылаған негізгі нәтижелері.** Әлсіз  $o$ -минималды және әлсіз циклді минималды теорияларды зерттеуде жаңа ғылыми нәтижелер алынды.

–  $\omega$ -категориялық дерлік әбден  $o$ -минималды теориялардағы алгебралық емес жұптық әлсіз ортогональды 1-типтерінің ерікті ақырлы топтарының ортогональдылығы.

–  $\omega$ -категориялық дерлік  $o$ -минималды теориялардың бинарлылығы.

- Саналымды модельдердің аз саны бар, ақырлы дөңес дәрежесінің әлсіз о-минималды теорияларының дерлік омега-категориялығы.
- Омега-категориялық дерлік әлсіз о-минималды теориялар үшін бос жиын бойынша алгебралық емес 1-типтегі бинарлық оқшаулау формулаларының алгебрасын сипаттау.
- Әлсіз ортогональды емес, алгебралық емес 1-типті жұп бойынша бинарлық оқшаулау формулалар алгебрасының жалпылама коммутативтілік критерийі.
- Саналымды категориялық 1-өтпелі емес әлсіз циклді минималды құрылымдардың дөңес дәрежесі бойынша дерлік бинарлық критерийі.

**Зерттеудің теориялық және практикалық маңызы.** Жұмыс теориялық. Алынған нәтижелерді модельдер теориясында, группалар теориясында, өрістер теориясында қолдануға болады. Нәтижелердің кейбірі деректер қорына сұраныс жасауда қолдануға болады; атап айтқанда, кеңейтілген сұрауларды шектеулі сұрауларға азайту мәселелерін қарастырғанда.

**Зерттеу көздері.** Әлсіз о-минималды және әлсіз циклдік минималды теориялар модельдерінің қасиеттерін зерттеудің негізі – А. Пиллай, Д. Маркер, Ч. Стейнхорн, Д. Макферсон, Б.С. Байжанов, Л. Ван Ден Дриес және т.б. авторлардың зерттеулері болып табылады.

**Жұмысты апробациялау.** Диссертация нәтижелері логикалық коллоквиумда (Познань, Польша, 2021), А.И. Мальцевті еске алуға арналған "Мальцев оқулары" математикалық логика бойынша халықаралық конференциясында (Новосибирск, 2020, 2021), "Дифференциалдық теңдеулер мен алгебраның өзекті мәселелері" атты Халықаралық ғылыми конференцияда (Нұр-Сұлтан, 2019), Дәстүрлі халықаралық сәуір математикалық конференциясында (Алматы, 2020, 2021), "Білім мен ғылымдағы математикалық модельдеу және ақпараттық технологиялар" (Алматы, 2020) атты халықаралық конференцияларында ұсынылды.

**Жарияланымдар.** Негізгі нәтижелер [27]–[41] жұмыстарында жарияланған.

**Диссертацияның құрылымы мен көлемі.** Диссертация кіріспеден, алты бөлімнен, қорытындыдан, пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады.

Автор өзінің ғылыми кеңесшілері – Күлпешов Бейбіт Шайықұлына және Судоплатов Сергей Владимировичке диссертациямен жұмыс барысында проблемаларды қойғаны үшін, құнды пікірлері мен пайдалы пікірталастары үшін шексіз алғысын білдіреді.

# 1 ӘЛСІЗ О-МИНИМАЛДЫ ТЕОРИЯЛАРДЫҢ ДЕРЛІК ОМЕГА-КАТЕГОРИЯСЫ ТУРАЛЫ

## 1.1 Алдын ала мәліметтер

$L$  саналымды бірінші реттік тілі болсын.  $L$ -құрылымын қарастырамыз және бинарлы қатынас  $<$  символы бұл құрылымда сызықтық реттілік ретінде түсіндірілетін болады.  $M$  құрылымындағы ашық интервал кейбір  $a, b \in M \cup \{-\infty, \infty\}$  үшін  $a < b$  жағдайында  $I = \{c \in M : M \models a < c < b\}$  қалпында параметрлік анықталатын ішкі жиыны болып табылады. Сол сияқты  $M$  құрылымында жабық, жартылай ашық - жартылай жабық және т.б. интервалдарын анықтауға болады. Сондай-ақ  $a \in M$  еркін нүктесін  $[a, a]$  интервалында көрсете аламыз.  $M$  — дағы интервал деп жоғарыда көрсетілген интервалдардың кез келгенін айта аламыз. Барлық  $a, b \in A$  және  $c \in M$  үшін  $a < c < b$  жағдайында  $c \in A$  болғандағы сызықтық реттелген  $M$  құрылымының ішкі  $A$  жиыны дөңес болады.

Бұл жұмыс Д.Макферсон, Д.Маркер және С.Стейнхорн терең зерттеген әлсіз о-минималдылық түсінігіне қатысты. Кез келген, анықталатын параметрлері бар ішкі жиыны  $M$ -дегі ақырғы көп дөңес жиындардың бірігуінен болатын

$M = \langle M, =, <, \dots \rangle$  сызықты реттелген құрылымы әлсіз о-минималды құрылым болады. Еске түсіре кетсек, кез келген анықталатын (параметрлері бар) ішкі жиыны  $M$ -дағы шексіз көп интервалдар мен нүктелердің бірігуінен болатын  $M$  құрылымын  $o$  — минималды деп атаймыз. Осылайша, әлсіз о-минималдылық о-минималдылық түсінігін жалпылайды. Тиісті дөңес бағалау сақинасы бар нақты жабық өрістер әлсіз о-минималды (о-минималды емес) құрылымдардың маңызды мысалын береді.

$A$  және  $B$  сызықты реттелген  $M$  құрылымының ерікті ішкі жиындары болсын. Сонда  $A < B$  өрнегі үшін  $a \in A$  және  $b \in B$  болғанда  $a < b$  орындалады және  $A < b$  ол  $A < \{b\}$  екенін көрсетеді.  $M$  құрылымының ерікті ішкі  $A$  жиыны үшін келесі белгілерді енгіземіз:  $A^+ := \{b \in M \mid A < b\}$  және  $A^- := \{b \in M \mid b < A\}$ . Бір типті ерікті  $p$  үшін  $p(M)$  арқылы  $M$ -дегі  $p$  іске асыру жиынын белгілейміз. Ұзындығы  $n$  ерікті  $\bar{b} = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$  кортежі үшін  $\bar{b}_i$  арқылы әрқайсысы  $1 \leq i \leq n - 1$  болатын  $\langle b_1, b_2, \dots, b_i \rangle$  кортежін белгілейміз. Егер  $B \subseteq M$  және  $M$  — құрылымында  $E$  эквиваленттілік қатынасы болса, онда  $B/E$  арқылы  $B$  мүшелері бар эквиваленттік класстар ( $E$  класстары) жиынын белгілейміз.

Егер  $f$  -  $M$ -дегі функция болса, онда  $f$ -тің анықталу облысы  $Dom(f)$ . Әрбір  $T$  формуласы  $T$  тілінде ең көбі екі бос айнымалысы бар формулалардың логикалық тіркесіміне эквивалентті болса,  $T$  теориясы бинарлы деп аталады.

Әрі  $T$  ерікті толық теориясын қарастырамыз (егер басқаша айтылмаса), мұндағы  $M$   $T$  теориясының жеткілікті қаныққан моделі.

**Анықтама 1.1.1.**  $T$  әлсіз о-минималды теория,  $M \models T$ ,  $A \subseteq M$ ,  $p, q \in S_1(A)$  алгебралық емес.  $\beta_1 \in H(M, \alpha)$  және  $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$  болатындай  $A$  анықтайтын  $H(x, y)$ ,  $\alpha \in p(M)$  және  $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$  формулалары бар болса,  $p$   $q$ -

ға әлсіз емес ортогональ болады ( $p \not\prec^w q$ ).

Яғни, егер  $p(x) \cup q(y)$  бойынша толық 2-типті бірегей кеңейтімге ие болса,  $p$   $q$ -ға әлсіз ортогональды болады.

**Лемма 1.1.2.** [2]  $T$  әлсіз о-минималды теория болсын,  $M \models T$ ,  $A \subseteq M$ . Онда  $\prec^w$  әлсіз ортогональдылық емес қатынасы  $S_1(A)$  бойынша эквиваленттік қатынас.

**Анықтама 1.1.3.** [3] Егер  $A$  - анықталатын  $f: p(M) \rightarrow q(M)$  биекциясы болмаса онда  $p$  типі  $q$  ( $p \not\prec^q q$ ) типіне әбден ортогональды болады. Егер 1-типті әлсіз және әбден ортогональдық ұғымдары сәйкес келсе, әлсіз о-минималды теория әбден о-минималды болады.

Кез келген о-минималды теория әбден о-минималды болатыны анық. [4] жұмысында саналымды категориялық әбден о-минималды теориялар толық сипатталған, ал [5] жұмысында саналымды модельдердің аз саны бар толық о-минималды теориялар үшін бинарлы оқшаулау формулаларының таралу алгебралары сипатталды.

**Анықтама 1.1.4.**  $T$  әлсіз о-минималды теория болсын,  $M \models T$  теориясының жеткілікті қаныққан моделі,  $A \subseteq M$ .

$A$  жиынының дөңестік дәрежесі ( $RC(A)$ ) төмендегідей анықталады:

- 1) егер  $A = \emptyset$  онда  $RC(A) = -1$
- 2) егер  $A$  ақырлы және бос емес болса, онда  $RC(A) = 0$
- 3) егер  $A$  шексіз болса, онда  $RC(A) \geq 1$
- 4) егер параметрлік анықталатын  $E(x, y)$  эквиваленттік қатынас және элементтердің шексіз  $b_i \in A, i \in \omega$  тізбегі бар болса  $RC(A) \geq \alpha + 1$  орындалады онда:
  - әрбір  $i, j \in \omega$  үшін  $i \neq j$  болғанда  $M \models \neg E(b_i, b_j)$ ;
  - әрбір  $i \in \omega$  үшін  $RC(E(x, b_i)) \geq \alpha$  және  $E(M, b_i)$   $A$  ның ішкі дөңес жиыны болады.

5) Барлық  $\alpha \leq \delta$  үшін  $RC(A) \geq \alpha$  болғанда,  $RC(A) \geq \delta$ , мұнда  $\delta$  ақырлы реттік ординал.

Кейбір  $\alpha$  үшін  $RC(A) = \alpha$  болса,  $RC(A)$  анықталады. Кері жағдайда (яғни, барлық  $\alpha$  үшін егер  $RC(A) \geq \alpha$ )  $RC(A) = \infty$  болады.

$\phi(x, \bar{a})$  формуласының дөңестік дәрежесі  $\phi(M, \bar{a})$  жиынының дөңестік дәрежесі ретінде анықталады, яғни  $RC(\phi(x, \bar{a})) := RC(\phi(M, \bar{a}))$ .

1-типті  $p$  – ның дөңестік дәрежесі  $p(M)$  жиынының дөңестік дәрежесі ретінде анықталады, яғни  $RC(p) := RC(p(M))$ .

Атап айтқанда, ақырлы емес дөңес кластардың шексіз санымен анықталатын (параметрлері бар) эквиваленттік қатынастары болмаса, теорияның дөңес дәрежесі 1 болады. Әрбір о-минималды теорияның 1-дөңес дәрежесі бар екені анық.

Егер 1.1.4 анықтамасында параметрлік анықталатын эквиваленттік қатынастарды  $\emptyset$ -анықталатын (яғни, бинарлы) қатынасымен ауыстырсақ, ерікті бір орындық  $\phi(x)$  формуласының дөңес дәрежесі бинарлы болады және

$RC_{bin}(\phi(x))$  арқылы белгіленеді.

**Теорема 1.1.5.** [10]  $T$  дерлік  $\omega$ -категориялық әлсіз о-минималды теория,  $p \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес болсын. Онда  $RC_{bin}(p) < \omega$ .

Егер  $T$  теориясының  $\kappa$  ( $\kappa$ -дан аз) саналымды жұптық изоморфты емес модельдері бар болса, онда  $T$  теориясының  $\kappa$  ( $\kappa$ -дан аз) саналымды модельдері бар деп есептейміз. Егер  $T$  теориясы саналымды категориялық болмаса және  $T$  есептелетін моделдердің саны ақырлы болса, онда  $T$  толық теориясы эренфойхты деп аталады. Еске салсақ,  $S(T) = \bigcup_{k=1}^{\omega} S_k(\emptyset)$  жағдайында, егер  $|S(T)| = \omega$ , болса  $T$  толық теориясы шағын болады.  $2^{\omega}$  - ден аз есептелетін моделдері бар кез келген саналымды теорияның (атап айтқанда, кез келген саналымды категориялық және кез келген Эренфойхт теориясы) шағын екені белгілі.

**Анықтама 1.1.6.** [45, 46]  $T$  толық теория болсын,  $p_1(x_1), \dots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$ . Егер  $q(x_1, \dots, x_n) \supseteq \bigcup_{i=1}^n p_i(x_i)$  орындалатын болса  $q(x_1, \dots, x_n) \in S_n(\emptyset)$  типі  $(p_1, \dots, p_n)$  тип болады.  $T$  теориясының  $(p_1, \dots, p_n)$  барлық типтерінің жиыны  $S_{p_1, \dots, p_n}(T)$  арқылы белгіленеді. Егер кез келген  $p_1(x_1), \dots, p_n(x_n) \in S_1(\emptyset)$  типтері үшін  $q(x_1, \dots, x_n) \in S_{p_1, \dots, p_n}(T)$  ақырлы көп типтері болса,  $T$  саналымды теориясы дерлік  $\omega$ -категориялық болады.

Дерлік  $\omega$ -категориялық - эренфойхт теориясы ұғымымен тығыз байланысты. [45] Жұмысында егер  $T - I(T, \omega) = 3$  шартымен дерлік  $\omega$  категориялық теория болса, онда  $T$  теориясында тығыз сызықтық реттілік орын алатындығы дәлелденді. [47] жұмысында эренфойхттық дерлік о-минималды теориясының  $\omega$ -категориялығы анықталды, және  $\omega$ -категориялық дерлік о-минималды теорияларда алгебралық тұйықталудың алмастыру принципі орындалатыны дәлелденді. Соңғы [30] жұмысында дерлік  $\omega$ -категориялық әбден о-минималды теориялардың бинарлығы дәлелденді.

**Анықтама 1.1.7.** [48]  $\prod_{n \in \omega} M_n$ ,  $P_n = M_n$   $\Sigma_n$  универсумымен,  $n \in \omega$  жұптастырылған предикат белгілері бар  $\mathcal{M}_n$  жұптастырылған құрылымдардың  $\prod_{n \in \omega} \mathcal{M}_n$  дизъюнктивті бірігуін және  $\mathcal{M}_n, n \in \omega$  құрылым интерпретациясымен сәйкес келетін,  $\Sigma_n$  предикат символдарының интерпретациясын  $\bigcup_{n \in \omega} \Sigma_n \cup \{P_n^{(1)} | n \in \omega\}$  сигнатурасының құрылымы деп атаймыз.

$\prod_{n \in \omega} T_n$  теорияларының дизъюнктивті бірігуі  $T_n$  теорияларының  $M_n$  модельдерін таңдауға тәуелді емес екені анық.

Айта кетсек, дерлік  $\omega$ -категориялық әлсіз о-минималды теориялар, жалпы алғанда, эренфойхты болмайды. Мұндай теорияның мысалы ретінде,  $\omega$  типі бойынша реттелген, үш саналымды модельдерімен Эренфойхт мысалының саналымды санының дизъюнктивтік бірігуін келтіруге болады. Бұл теория бос жиын бойынша, жұптық әлсіз ортогональды оқшауланбаған 1-типтердің саналымды санына ие, сондықтан саналымды модельдердің максималды саны (континуум) бар.

$\omega$  – категориялық әлсіз о - минималды теория жалпы жағдайда шағын болмайды. Осы теорияға мысал ретінде  $M = \langle \mathbb{Q}, <, q \rangle_{q \in \mathbb{Q}}$  құрылымын

карастырсақ болады.  $Th(M)$  о-минималды және бос жиын бойынша континуум 1-типтері бар, яғни шағын болмайды.

Дөңестік дәрежесі шексіз алгебралық емес  $p \in S_1(\emptyset)$  типі бар  $\omega$ -категориялық әлсіз о-минималды теориялардың бар екенін ескереміз. Мұндай теорияның мысалы ретінде [49]-да берілген саналымды категориялық 2-бөлінбейтін әлсіз о-минималды құрылымды қарастыруға болады.

Жақында Воот болжамы толық теориялардың кейбір класстары, яғни: толық о-минималды теориялар үшін [50] жұмысында, дөңес 1 дәрежелі әлсіз о-минималды теориялар үшін [51] жұмысында және соңғы дөңес дәрежесінің әлсіз о-минималды теориялары үшін [52] жұмысында расталды. Шағын бинарлы әбден о-минималды теориялардағы максималды есептелетін спектрдің критерийі [53] жұмысында алынды. Бұл тарауда  $2^\omega$ -ден аз саналымды модельдері бар ақырлы дөңес дәрежесінің әлсіз о-минималды теориялары дерлік  $\omega$ -категориялық екенін дәлелдейміз.

## 1.2 Негізгі теорема

Әрі қарай [54] енгізілген алгебралық емес оқшауланған 1-типті  $(p, q)$ -секатор түсінігі қажет.  $A \subseteq M$  деп алсақ,  $p, q \in S_1(A)$  алгебралық емес болсын, яғни  $p \not\leq^w q$ .  $(p, q)$  - бөлу формуласы туралы түсінікті оқшауланбаған жағдайға кеңейте отырып, аламыз,

$$\phi(a, M) \cap q(M) \neq \emptyset, \neg \phi(a, M) \cap q(M) \neq \emptyset, \quad (1.1)$$

$$\phi(a, M) \cap q(M) \text{ дөңес, және } [\phi(a, M) \cap q(M)]^- = [q(M)]^-$$

орындалатындай  $a \in p(M)$  бар болса, онда  $A$  - анықталатын  $\phi(x, y)$  формуласы  $(p, q)$  – секаторы болады.  $\phi_1(x, y)$ ,  $\phi_2(x, y)$   $(p, q)$  - секаторлар деп алсақ,

$$\phi_1(a, M) \cap q(M) \subset \phi_2(a, M) \cap q(M) \quad (1.2)$$

орындалатындай  $a \in p(M)$ ,  $\phi_1(x, y) \not\leq \phi_2(x, y)$  – ден кіші болады.

Әлбетте, егер  $p, q \in S_1(A)$  алгебралық емес және  $p \not\leq^w q$  болса, онда  $(p, q)$  – секаторы болады және барлық  $(p, q)$  - секаторларының жиыны сызықтық реттелінген. Сондай-ақ кез келген  $(p, q)$  - секаторы үшін  $\phi(x, y)$  функциясы  $f(x) := \sup \phi(x, M) p(M)$  бойынша тұрақты емес екені анық.

**Лемма 1.2.1.** [52]  $T$  -  $2^\omega$  саналымды модельдерінен аз болатын әлсіз о-минималды теория болсын,  $M \models T$ ,  $p_1, p_2 \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес,  $p_1 \not\leq^w p_2$ . Онда  $(p_1, p_2)$  секаторлары болады.

**Теорема 1.2.2.**  $2^\omega$ -ден аз саналымды моделі бар ақырлы дөңес дәрежесінің кез келген әлсіз о-минималды теориясы дерлік  $\omega$ -категориялық болып табылады.

1.2.2 теореманы дәлелдеу.

$T$   $2^\omega$  – саналымды моделінен аз дөңестік дәрежесі ақырлы әлсіз о-

минималды теориясы болсын, ал  $M \ T$  теориясында саналымды қаныққан модель болсын.

$p_1, \dots, p_n \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес типтердің кез келген тобы үшін  $(p_1, \dots, p_n)$ -типтері шектеулі ғана болатынын  $n \geq 2$  жағдайында индукция арқылы дәлелдеп көрейік.

Қадам  $n = 2$ .

Жағдай 1.  $p_1 \perp^w p_2$ . Сонда  $p_1(x_1) \cup p_2(x_2)$  формулалар жиыны  $\emptyset$  – да толық 2-типті анықтайды, демек,  $(p_1, p_2)$ -типтарының саны 1-ге тең.

Жағдай 2.  $p_1 \not\perp^w p_2$ . Сонда 1.2.1 Леммасы бойынша -  $(p_1, p_2)$  секаторлар саны ақырлы. Секаторлар саны кейбір  $s < \omega$  үшін  $\Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y), \dots, \Phi_s(x, y)$  арқылы белгіленеді және кез келген  $a \in p_1(M)$  үшін төмендегі формуланы аламыз

$$\Phi_1(a, M) \cap p_2(M) \subset \Phi_2(a, M) \cap p_2(M) \subset \dots \subset \Phi_s(a, M) \cap p_2(M). \quad (1.3)$$

Сонда  $p_1(x_1) \cup p_2(x_2)$  жиынының бірегей мүмкін кеңейтімдері төмендегідей болатынын белгілейміз.

$$\begin{aligned} & p_1(x_1) \cup p_2(x_2) \cup \{\Phi_1(x_1, x_2)\} \\ & p_1(x_1) \cup p_2(x_2) \cup \{\Phi_2(x_1, x_2) \wedge \neg \Phi_1(x_1, x_2)\} \\ & \dots \dots \dots \\ & p_1(x_1) \cup p_2(x_2) \cup \{\Phi_s(x_1, x_2) \wedge \neg \Phi_{s-1}(x_1, x_2)\} \\ & p_1(x_1) \cup p_2(x_2) \cup \{\neg \Phi_s(x_1, x_2)\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$p_1(x_1) \cup p_2(x_2) \cup \{\Phi_1(x_1, x_2)\}$  бос жиын бойынша толық типті анықтайтынын көрсетеміз. Егер олай болмаса, онда кейбір  $a_1, a'_1 \in p_1(M), a_2, a'_2 \in p_2(M)$  үшін  $\emptyset$ -мен анықталатын  $\Psi(x_1, x_2)$  формуласы болады

$$M \models \Phi_1(a_1, a_2) \wedge \Psi(a_1, a_2) \wedge \Phi_1(a'_1, a'_2) \wedge \neg \Psi(a'_1, a'_2) \quad (1.5)$$

Сонда  $a''_2 \in p_2(M)$  үшін

$$M \models \Phi_1(a_1, a''_2) \wedge \neg \Psi(a_1, a''_2) \quad (1.6)$$

орындалатынын көреміз.

Керісінше алсақ:  $\Phi_1(a_1, a''_2)$  орындалатындай кез келген  $a''_2 \in p_2(M)$  үшін  $\Psi(a_1, a''_2)$  аламыз.

$q(x_1, x_2) := tp(\langle a_1, a_2 \rangle / \emptyset)$  бар делік. Кез келген  $\theta(y) \in p_2$  және  $\phi(x, y) \in q$  үшін келесі формуланы қарастырамыз:

$$K_{\theta, \psi}(x) := \forall y [\theta(y) \wedge \psi(x, y) \rightarrow R(x, y)]. \quad (1.7)$$

Болжамымызға орай  $(y) \in p_2$  және  $\psi(x, y) \in q$  үшін  $M \models K_{\theta, \psi}(a_1)$  аламыз.  $a_1, a'_1 \in p_1(M)$  бар болғандықтан, кез келген  $\theta(y) \in p_2$  және  $\psi(x, y) \in q$  үшін  $M \models K_{\theta, \psi}(a'_1)$ . Бұл соңғы шартқа қайшы.  $p_1(M) < p_2(M)$  және  $a_2 < a''_2$  деп алсақ. Сондай-ақ, әлсіз о-минималдылығына байланысты  $\Psi(a_1, M)$  дөңес деп алайық. Келесі формуланы қарастырсақ

$$\Theta(a_1, y) := a_1 \leq y \wedge \exists t[\Psi(a_1, t) \wedge y \leq t]. \quad (1.8)$$

Әлбетте,  $\Theta(x, y) (p_1, p_2)$  - секатор және

$$\Theta(a_1, M) \cap p_2(M) \subset \Phi_1(a_1, M) \cap p_2(M). \quad (1.9)$$

Соңғысы  $\Phi(x, y)$  ең кіші  $(p_1, p_2)$ - секатор екеніне қайшы келеді. Сол сияқты,  $p_1(x_1) \cup p_2(x_2)$  жиынының қалған кеңейтімдері бос жиында толық типті анықтайтынын дәлелдей аламыз.

Осылайша,  $(p_1, p_2)$ -типтерінің шекті сандары бар.

Барлық  $k \leq n$  үшін  $(p_1, \dots, p_k)$ - типтерінің саны шекті екенін анықтадық деп алып  $n + 1$  үшін дәлелдесек.

$n + 1 > 2$  қадам. Ерікті алгебралық емес  $p_1, \dots, p_n, p_{n+1} \in S_1(\emptyset)$  типтерін қарастырсақ. [52] 4.4 теоремасы бойынша  $T$  бинарлы болып табылады, сондықтан келесі жағдайларды қарастырамыз

1-жағдай. әрбір  $1 \leq i \leq n$  үшін  $p_{n+1} \perp^w p_i$ . Бұл жағдайда  $(p_1, \dots, p_n, p_{n+1})$ -типтерінің саны  $(p_1, \dots, p_n)$  - типтерінің санына сәйкес келеді.

2-жағдай. әрбір  $1 \leq i \leq n$  үшін  $p_{n+1} \not\perp^w p_i$ . Бұл жағдайда Лемма 1 бойынша  $p_1, \dots, p_n, p_{n+1}$  типтер жұптық әлсіз емес ортогональды. Индукциялық гипотеза бойынша  $(p_1, \dots, p_n)$  - типтердің саны шектеулі. Бұл санды  $S_{p_1, \dots, p_n}$  арқылы белгілейміз. Лемма 2 бойынша тек шексіз көп  $(p_i, p_{n+1})$  бөлу формулалары бар болғандықтан, әрбір  $1 \leq i \leq n$  үшін  $p_i \not\perp^w p_{n+1}$ . Бұл санды  $m_i$  арқылы белгілейміз және  $\{\Phi_1^i(x, y), \Phi_2^i(x, y), \dots, \Phi_{m_i}^i(x, y)\} (p_i, p_{n+1})$  - секаторы болсын, сонда кез-келген  $a_i \in p_i(M)$  үшін төмендегі формулалар орындалады:

$$\Phi_1^i(a_i, M) \cap p_{n+1}(M) \subset \Phi_2^i(a_i, M) \cap p_{n+1}(M) \subset \dots \subset \Phi_{m_i}^i(a_i, M) \cap p_{n+1}(M). \quad (1.10)$$

Әлбетте, әрбір  $1 \leq i < j \leq n$  және кез келген  $1 \leq s \leq m_i, 1 \leq l \leq m_j$  үшін

$$\Phi_s^i(a_i, M) \cap p_{n+1}(M) \subseteq \Phi_l^j(a_j, M) \cap p_{n+1}(M) \quad (1.11)$$

$$\text{or } \Phi_l^j(a_j, M) \cap p_{n+1}(M) \subset \Phi_s^i(a_i, M) \cap p_{n+1}(M) \text{ бар.}$$

Демек, (қажет болса) барлық  $\Phi_1^1(x, y), \dots, \Phi_{m_1}^1(x, y) (p_1, p_{n+1})$  - секаторларының,  $\Phi_1^2(x, y), \dots, \Phi_{m_2}^2(x, y) (p_2, p_{n+1})$  - секаторларының төмендегідей түрлендірулері

бар.

$$\begin{aligned} F_1(c_1, M) \cap p_{n+1}(M) &\subseteq F_2(c_2, M) \cap p_{n+1}(M) \subseteq \\ \dots &\subseteq F_{m_1+m_2+\dots+m_n}(c_{m_1+m_2+\dots+m_n}, M) \cap p_{n+1}(M), \end{aligned} \quad (1.12)$$

мұнда барлық  $1 \leq k \leq m_1 + m_2 + \dots + m_n$  үшін  $c_k = a_{i_k}$  болатындай  $1 \leq i_k \leq n$  болады.

Ерікті  $q(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S_{p_1, \dots, p_n}(T)$  типін аламыз. Сонда  $q(x_1, x_2, \dots, x_n) \cup p(x_{n+1})$  формулалар жиынының ең көп  $m_1 + m_2 + \dots + m_n$  кеңейтімдері бар екенін расталады:

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) \cup p(x_{n+1}) \cup \{F_1(x^{(1)}, x_{n+1})\} \quad (1.13)$$

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) \cup p(x_{n+1}) \cup \{F_2(x^{(2)}, x_{n+1}) \wedge \neg F_1(x^{(1)}, x_{n+1})\} \quad (1.14)$$

... ..

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, \dots, x_n) \cup p(x_{n+1}) \cup \{F_{m_1+m_2+\dots+m_n}(x^{(m_1+m_2+\dots+m_n)}, x_{n+1}) \wedge \\ \neg F_{m_1+m_2+\dots+m_n-1}(x^{(m_1+m_2+\dots+m_n-1)}, x_{n+1})\} \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) \cup p(x_{n+1}) \cup \{\neg F_{m_1+m_2+\dots+m_n}(x^{(m_1+m_2+\dots+m_n)}, x_{n+1})\}, \quad (1.16)$$

Кез келген  $1 \leq i \leq m_1 + m_2 + \dots + m_n$  үшін мұндағы  $1 \leq i_k \leq n$  болғанда  $x^{(i)} = x_{i_k}$  болады.  $\emptyset$  да

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) \cup p(x_{n+1}) \cup \{F_1(x^{(1)}, x_{n+1})\} \quad (1.17)$$

толық түрді анықтайтынын көрсетсек.

Жалпы, әрбір  $2 \leq j \leq n$  үшін  $x^{(1)} = x_1$  делік, яғни

$$\Phi_1^1(a_1, M) \cap p_{n+1}(M) \subseteq \Phi_1^j(a_j, M) \cap p_{n+1}(M). \quad (1.18)$$

Керісінше делік, екеуі де бірдей  $\emptyset$  - анықталатын  $\psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  формуласы бар, және олар сәйкес келеді делік:

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) \cup p(x_{n+1}) \cup \{F_1(x^{(1)}, x_{n+1})\} \cup \{\psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})\} \quad (1.19)$$

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) \cup p(x_{n+1}) \cup \{F_1(x^{(1)}, x_{n+1})\} \cup \{\neg \psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})\}. \quad (1.20)$$

Сонда  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle, \langle a'_1, \dots, a'_n \rangle \in q(M^n)$  және

$$M \models F_1(a_1, a_{n+1}) \wedge F_1(a'_1, a'_{n+1}) \wedge \psi(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \wedge \neg\psi(a'_1, \dots, a'_n, a'_{n+1}) \quad (1.21)$$

орындалатындай  $a_1, a'_1 \in p_1(M)$ ,  $a_2, a'_2 \in p_2(M)$ ,  $\dots$ ,  $a_n, a'_n \in p_n(M)$  және

$$a_{n+1}, a'_{n+1} \in p_{n+1}(M).$$

$T$  бинарлығы бойынша

$$\psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \equiv \bigvee_{l=1}^s [\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n+1} \psi_{ij}^l(x_i, x_j)]. \quad \text{бар} \quad (*) \quad (1.22)$$

Сонда әрбір  $1 \leq l \leq s$  үшін  $tp(\langle a_1, \dots, a_n \rangle / \emptyset) = tp(\langle a'_1, \dots, a'_n \rangle / \emptyset)$  болғандықтан:

$$M \models \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \psi_{ij}^l(a_i, a_j) \Leftrightarrow M \models \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \psi_{ij}^l(a'_i, a'_j) \quad (1.23)$$

Әлбетте, (\*)

$$\neg\psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \equiv \bigwedge_{l=1}^s [\bigvee_{1 \leq i < j \leq n+1} \neg\psi_{ij}^l(x_i, x_j)], \quad (1.24)$$

$$\neg\psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \equiv \bigwedge_{l=1}^s$$

$$[\bigvee_{1 \leq i < j \leq n} \neg\psi_{ij}^l(x_i, x_j) \vee \bigvee_{m=1}^n \neg\psi_{m,n+1}^l(x_m, x_{n+1})], \quad (1.25)$$

және соның салдарынан,

$$\neg\psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \equiv \bigwedge_{l=1}^s [\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \psi_{ij}^l(x_i, x_j) \rightarrow \bigvee_{m=1}^n \neg\psi_{m,n+1}^l(x_m, x_{n+1})]. \quad (1.26)$$

$n = 2$  қадамындағыдай (2-жағдай) ұқсас дәлелдер арқылы  $a''_{n+1} \in p_{n+1}(M)$

$$M \models F_1(a_1, a''_{n+1}) \wedge \neg\psi(a_1, \dots, a_n, a''_{n+1}) \quad (1.27)$$

ала аламыз.

Демек,  $M \models \neg\psi_{j,n+1}^l(a_j, a''_{n+1})$  болатындай  $1 \leq l \leq s$  және  $1 \leq j \leq n$  бар. Сонда ең аз  $(p_j, p_{n+1})$  бөлу формуласы болатын  $\Phi_1^j(x_j, x_{n+1})$  шартпен қайшылық алынады.

Ұқсас аргументтер формулалар жиынының кеңейтімдерінің әрқайсысы  $\emptyset$  бойынша  $q(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \cup p(x_{n+1})$  үстіндегі толық типін анықтайтынын көрсетеді.

Ұқсас аргументтер  $q(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \cup p(x_{n+1})$  формулалар жиынының кеңейтімдерінің әрқайсысы  $\emptyset$ -нан асатын толық типті анықтайтынын көрсетеді.

Жағдай 3. Кейбір ерекше  $1 \leq i, j \leq n$  үшін  $p_{n+1} \not\perp^w p_i$  және  $p_{n+1} \perp^w p_j$ . Сонда  $\{p_1, \dots, p_n\}$  жиынының кейбір нөмірленуі (қажет болса) болады, барлық  $1 \leq j \leq k$  үшін  $p_{n+1} \perp^w p_j$  болғанда кейбір  $1 \leq k < n$  және барлық  $k + 1 \leq l \leq$

$n$  үшін  $p_{n+1} \not\prec^w p_l$  орындалады. Индукциялық гипотеза бойынша  $(p_1, \dots, p_k, p_{n+1})$ -типтерінің саны да,  $(p_{k+1}, \dots, p_n, p_{n+1})$ -типтерінің саны да шекті, ал  $(p_1, \dots, p_k, p_{n+1})$ -типтерінің саны  $(p_1, \dots, p_k)$ -типтерінің санына сәйкес келеді.

Бұл сандарды сәйкесінше  $S_{p_1, \dots, p_k}$  және  $S_{p_{k+1}, \dots, p_n, p_{n+1}}$  арқылы белгілейміз. Сонда  $(p_1, \dots, p_n, p_{n+1})$ -типтерінің саны  $S_{p_1, \dots, p_k} \times S_{p_{k+1}, \dots, p_n, p_{n+1}}$  артық емес, яғни ол шекті.

## 2 ДЕРЛІК ОМЕГА-КАТЕГОРИЯЛЫҚ ӘБДЕН О-МИНИМАЛДЫ ТЕОРИЯЛАРДЫҢ БИНАРЛЫЛЫҒЫ

### 2.1. 2-формулардың әрекеті

**Анықтама 2.1.1.** [55]  $M$  әлсіз о-минималды құрылым,  $A \subseteq M$ ,  $M - |A|^+$  қаныққан, және  $p \in S_1(A)$  алгебралық емес.

(1)  $F(M, \alpha) \setminus \{\alpha\} \neq \emptyset$  және  $\gamma_1 < F(M, \alpha) < \gamma_2$  орындалатындай  $\alpha$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 \in p(M)$  болса,  $A$ -анықталатын  $F(x, y)$  формуласы  $p$ -тұрақты немесе  $p$  – сақтап қалушы деп аталады.

(2)  $\alpha \in F(M, \alpha)$  және  $\alpha - F(M, \alpha)$  жиынының сол (оң) соңғы нүктесі болатындай  $\alpha \in p(M)$  болса,  $p$ -тұрақты  $F(x, y)$  формуласы оңға (сол) дөңес деп аталады.

$F_1(x, y), F_2(x, y)$   $p$ -тұрақты оң (сол) жаққа дөңес формулалары болсын.  $F_1(M, \alpha) \subset F_2(M, \alpha)$  болатындай  $\alpha \in p(M)$  болса,  $F_2(x, y) - F_1(x, y)$  - ден үлкенірек деп айтамыз.

**Анықтама 2.1.2.**[56] Егер кез келген  $\alpha, \beta \in p(M)$  үшін  $M \models F(\beta, \alpha)$  болатындай төмендегі шарт орындалса:

$$M \models \forall x (x \geq \beta \rightarrow (F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta))) \quad (2.1)$$

$$(M \models \forall x (x \leq \beta \rightarrow (F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta)))) \quad (2.2)$$

онда, оңға (солға)  $p$ -тұрақты  $F(x, y)$  дөңес формуласы эквивалентті тудырушы болады.

**Лемма 2.1.3.** [56]  $M$  әлсіз о-минималды құрылым болсын,  $A \subseteq M$ ,  $M - |A|^+$  қаныққан,  $p \in S_1(A)$  - алгебралық емес,  $F(x, y)$  -  $p$ -тұрақты оңға (сол) дөңес формуласы.  $F(x, y)$  эквивалентті тудырушы емес деп есептейік. Сонда келесі шарт орындалатындай

$$M \models F(\beta, \alpha) \wedge \exists x (\neg F(x, \alpha) \wedge F(x, \beta)) \quad (2.3)$$

$\alpha, \beta \in p(M)$  болады.

**Лемма 2.1.4.** [56]  $M$  әлсіз о-минималды құрылым болсын,  $A \subseteq M$ ,  $M - |A|^+$  қаныққан,  $p \in S_1(A)$  алгебралық емес,  $F(x, y)$   $p$ -тұрақты оң (сол) дөңес формуласы болсын. Сонда келесі формула

$$F'(x, y) := \exists z (F(z, y) \wedge F(x, z)) \quad (2.4)$$

оңға (солға) дөңес  $p$ -тұрақты болады.

**Лемма 2.1.5.** [56]  $M$  әлсіз о-минималды құрылым,  $A \subseteq M$ ,  $p \in S_1(A)$  алгебралық емес,  $M - |A|^+$  қаныққан болсын.  $F(x, y)$  эквиваленттілікті тудыратын  $p$ -тұрақты оңға (сол) дөңес формуласы деп есептейік. Сонда

1)  $G(x, y) := F(y, x)$ - эквиваленттікті тудыратын солға (оң)  $p$  тұрақты

дөңес формула.

2)  $E(x, y) := F(x, y) \vee F(y, x)$   $p(M)$  ды шексіз дөңес кластардың шексіз санына бөлетін эквиваленттік қатынас формуласы болады.

**Тұжырым 2.1.6.**  $T$  дерлік  $\omega$ -категориялық әлсіз о-минималды теория және  $p \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес теория болсын. Сонда кез келген  $p$ -тұрақты оң (сол) дөңес формула эквивалент тудыратын формула болып табылады.

2.1.6. Тұжырымының дәлелі. Керісінше делік: эквивалент тудырмайтын тұрақты оң жақ дөңес  $F(x, y)$  формуласы бар. Лемма 2.1.3. бойынша,  $T$  теорияның кейбір  $M$  моделінде

$$M \models F(\beta, \alpha) \wedge \exists x (\neg F(x, \alpha) \wedge F(x, \beta)) \quad (2.5)$$

орындалатындай  $\alpha, \beta \in p(M)$  болады.

$F_1(x, y) := \exists z (F(z, y) \wedge F(x, z))$  формуланы қарастырсақ.

Лемма 2.1.4 негізінде  $F_1(x, y)$  -  $p$ -тұрақты оңға дөңес формула. Төмендегі формулаларды анықтасақ:

$$F_n(x, y) := \exists z (F_{n-1}(z, y) \wedge F(x, z)), \quad n \geq 2.$$

Сонда кез келген  $\alpha \in p(M)$  үшін

$$F_1(M, \alpha) \subset F_2(M, \alpha) \subset \dots \subset F_n(M, \alpha) \subset \dots \text{ болатынын түсіну оңай.}$$

Әрбір  $n \geq 2$  натурал саны үшін келесі формулалар жиынын қарастырайық:

$$p_n(x, y) := p(x) \cup p(y) \cup \{F_n(x, y) \wedge \neg F_{n-1}(x, y)\} \quad (2.6)$$

Ол локалды бірге. Сонда  $(p_1, p_2)$ -типтерінің саны шексіз екенін аламыз, мұнда  $p_i(x_i) := p(x_i), i = 1, 2$ . Соңғысы  $T$  – ның дерлік  $\omega$ -категориялығына қайшы келеді.

**Салдар 2.1.7.**  $T$  дерлік  $\omega$ -категориялық әлсіз о-минималды теория және  $p \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес теория болсын. Егер  $a_1 < a_2$   $p$  типін іске асыратын болса,  $a_1 < a_3 < a_2$  орындалатындай  $a_3$  бар болады.

Дәлелдеі.  $M \models T$  және  $a_1, a_2 \in M$  болсын. Қайшылықпен алсақ:  $a_1 < a_3 < a_2$  орындалатындай  $a_3 \in M$  ондай жоқ десек. Сонда келесі формуланы қарастырамыз:

$$F(x, a_1) := a_1 \leq x \wedge \forall z (a_1 \leq z \leq x \rightarrow z = a_1 \vee z = x)$$

$F(x, y)$  —  $p$ -тұрақты оңға дөңес және эквивалент тудырушы емес, бұл 2.1.6. тұжырымына қайшы келетінін байқау оңай.

**Салдар 2.1.8.**  $T$  дөңес кластарға бөлінген дерлік  $\omega$ -категориялық әлсіз о-минималды теория болсын,  $M \models T$ ,  $p \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес,  $E(x, y) \notin \emptyset$  - анықталатын  $p(M)$ -ды кем дегенде екі классқа бөлетін эквиваленттік қатынас

болсын. Сонда  $E$   $p(M)$ -ді осындай класстардың шексіз санына ыдыратады, осылайша класстардағы индукцияланған реттілікте соңғы нүктелері жоқ тығыз рет орын алады.

Дәлелдеуі. Егер  $a_1, a_2 \in p(M)$ ,  $\neg E(a_1, a_2)$  орындалатындай  $a_1, a_2 \in p(M)$  бар болса және  $\models E(a_1, a)$  немесе  $\models E(a, a_2)$  білдіретін кез келген  $a_1 < a < a_2$  орындалса, онда  $a \in M$  үшін, келесі формуланы қарастырамыз:

$$F(x, a_1) := \exists y(a_1 \leq x \leq y \wedge \neg E(a_1, y) \wedge \forall z(a_1 \leq z \leq y \rightarrow E(a_1, z) \vee E(z, y))).$$

Әлбетте,  $F(x, y)$ -  $p$  – тұрақты оңға қарай дөңес және  $F(x, y)$  эквиваленттілікті тудырмайды, бұл 2.1.6 тұжырымына қайшы.

**Лемма 2.1.9.**  $T$  – дерлік  $\omega$ -категориялық әлсіз о-минималды теория және  $p \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес болсын. Сонда  $RC_{bin}(p) < \omega$ .

Лемма 2.1.9. дәлелі. Керісінше делік:  $RC_{bin}(p) \geq \omega$ . Сонда кез келген  $a \in p(M)$  үшін  $\emptyset$  анықталатын  $\{E_i(x, y) | i \in \omega\}$  эквиваленттік қатынастардың шексіз саны болады.

$$E_1(a, M) \subset E_2(a, M) \subset \dots \subset E_i(a, M) \subset \dots$$

немесе кез келген үшін  $a \in p(M)$

$$E_1(a, M) \supset E_2(a, M) \supset \dots \supset E_i(a, M) \supset \dots$$

$E_0(x, y) := x = y$  болсын. Әрбір  $n \in \omega$  үшін келесі формулалар жинағын қарастырсақ:

$$p_n(x, y) := p(x) \cup p(y) \cup \{E_n(x, y) \wedge \neg E_{n-1}(x, y)\} \quad (2.8)$$

Ол локалды бірге. Сонда  $(p_1, p_2)$ -типтердің саны шексіз екенін аламыз, Мұндағы  $p_i(x_i) := p(x_i), i = 1, 2$ . Соңғысы  $T$  теориясының дерлік  $\omega$  категориялығына қайшы.

## 2.2. Ортогональдылық

**Лемма 2.2.1.** Барлық  $1 \leq i \leq m$  үшін  $tp(\bar{b}/A) = tp(\bar{b}'/A)$ ,  $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n-1} \rangle / A) = tp(\langle \bar{a}', \bar{b}'_{n-1} \rangle / A)$  және  $tp(\langle a_i, b_n \rangle / A) = tp(\langle a'_i, b'_n \rangle / A)$  орындалатындай  $T$  ерікті толық теория болсын,  $M \models T$ ,  $A \subseteq M$ ,  $M \perp^+ A$ -қаныққан,  $m, n < \omega$   $\bar{a} = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ ,  $\bar{a}' = \langle a'_1, \dots, a'_m \rangle \in M^m$ ,  $\bar{b} = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ ,  $\bar{b}' = \langle b'_1, \dots, b'_n \rangle \in M^n$  болсын. Сонда  $tp(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle / A) \neq tp(\langle \bar{a}', \bar{b}' \rangle / A)$  болуы  $b''_n \in M$  бар болуына әкеледі, сонда барлық  $1 \leq i \leq m$  және  $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n-1}, b_n \rangle / A) \neq tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n-1}, b''_n \rangle / A)$  үшін

$tp(\langle a_i, b_n \rangle / A) = tp(\langle a_i, b''_n \rangle / A)$  және  $tp(\bar{b}_{n-1}, b_n / A) = tp(\bar{b}_{n-1}, b''_n / A)$  орындалады.

2.2.1. Леммасының дәлелі.  $tp(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle / A) \neq tp(\langle \bar{a}', \bar{b}' \rangle / A)$  болғандықтан  $M \models R(\bar{a}, \bar{b}) \wedge \neg R(\bar{a}', \bar{b}')$  болатындай  $L_A$ -анықталатын  $R(\bar{x}, \bar{y})$  формуласы бар.

$1 \leq i \leq m$  шартымен,  $p(\bar{y}) := tp(\bar{b}/A)$ ,  $q_i(x, y) := tp(\langle a_i, b_n \rangle / A)$  болсын.

Кез келген  $\phi(\bar{y}) \in p$ ,  $\psi^i(x, y) \in q_i$  (мұндағы  $1 \leq i \leq m$ ) үшін келесі формуланы қарастырсақ:

$$K_{\phi, \psi^i}(\bar{x}, \bar{y}_{n-1}) := \forall y \left( \phi(\bar{y}_{n-1}, y) \wedge \bigwedge_{i=1}^m \psi^i(x_i, y) \rightarrow R(\bar{x}, \bar{y}_{n-1}, y) \right). \quad (2.9)$$

Керісінше алсақ:  $tp(\bar{b}_{n-1}, b_n/A) = tp(\bar{b}_{n-1}, b''_n/A)$  және  $tp(\langle a_i, b_n \rangle/A) = tp(\langle a_i, b''_n \rangle/A)$  орындалатындай кез келген  $b''_n \in M$  үшін барлық  $1 \leq i \leq m$  жағдайында,  $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n-1}, b_n \rangle/A) = tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n-1}, b''_n \rangle/A)$  алып келеді.

Сонда барлық  $\phi(\bar{y}) \in p$  және  $\psi^i(x, y) \in q_i$  үшін  $1 \leq i \leq m$  болғанда  $M \models K_{\phi, \psi^i}(\bar{a}, \bar{b}_{n-1})$  орындалады. Бірақ  $1 \leq i \leq m$  жағдайында барлық  $\phi(\bar{y}) \in p$  және  $\psi^i(x, y) \in q_i$  үшін  $M \models K_{\phi, \psi^i}(\bar{a}', \bar{b}'_{n-1})$  орындалады, бұл біздің болжамымызға қайшы.

**Лемма 2.2.2.**  $T$  дерлік  $\omega$ -категориялық әбден о-минималды теория болсын,  $M \models T$ ,  $p, q \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес,  $p \perp^w q$ . Сонда, кез келген  $a, a' \in p(M)$ ,  $b_1 < b_2, b'_1 < b'_2 \in q(M)$  үшін  $tp(\langle b_1, b_2 \rangle/\emptyset) = tp(\langle b'_1, b'_2 \rangle/\emptyset)$  орындалатындай  $tp(\langle a, b_1, b_2 \rangle/\emptyset) = tp(\langle a', b'_1, b'_2 \rangle/\emptyset)$  шығады.

Лемма 2.2.2 дәлелдеу. Керісінше қарастырсақ:  $tp(\langle b_1, b_2 \rangle/\emptyset) = tp(\langle b'_1, b'_2 \rangle/\emptyset)$  орындалатындай, бірақ  $tp(\langle a, b_1, b_2 \rangle/\emptyset) \neq tp(\langle a', b'_1, b'_2 \rangle/\emptyset)$  орындалмайтындай  $a, a' \in p(M)$ ,  $b_1 < b_2, b'_1 < b'_2 \in q(M)$  бар деп қарастырсақ. Бұл  $p$  және  $q$  әлсіз ортогональдылығына байланысты

$$tp(\langle a, b_1 \rangle/\emptyset) = tp(\langle a', b'_1 \rangle/\emptyset) = tp(\langle a, b_2 \rangle/\emptyset) = tp(\langle a', b'_2 \rangle/\emptyset) \quad (2.10)$$

Сонда 2.2.1 Леммасы бойынша

$$tp(\langle a, b_2 \rangle/\emptyset) = tp(\langle a, b''_2 \rangle/\emptyset), \quad tp(\langle b_1, b_2 \rangle/\emptyset) = tp(\langle b_1, b''_2 \rangle/\emptyset) \quad (2.11)$$

және  $tp(\langle a, b_1, b_2 \rangle/\emptyset) \neq tp(\langle a, b_1, b''_2 \rangle/\emptyset)$  орындалатындынтай  $b''_2 \in q(M)$  болады.

$$p' := tp(a/\{b_1\}), \quad q' := tp(b_2/\{b_1\}) \quad (2.12)$$

болсын.  $p$  және  $q$  әлсіз ортогональдылығына байланысты  $p'(M) = p(M)$  орындалады. Сонымен қатар  $q'$ -алгебралық емес. Егер  $q$  алгебралық болса, 2.1.6 Тұжырымына қайшы, эквивалент тудырмайтын,  $q$ -тұрақты оң жақ дөңес формуласын оңай құрастыратын едік. Әлбетте  $b_2, b''_2 \in q'(M)$ , одан  $p' \not\perp^w q'$  шығады. Онда, әбден о-минималдылыққа байланысты  $\{b_1\}$ -анықталатын  $f_{b_1}: p'(M) \rightarrow q'(M)$  биекциясы бар және  $f_{b_1}(a) = b_2^0$  болатындай  $b_2^0 \in q'(M)$ , яғни  $b_2^0 \in dcl_R(\{a, b_1\})$  бар болады.  $q'' := tp(b_1/\{a\})$  бар делік.  $q''(M) = q(M)$  және  $b_1, b_2^0 \in q''(M)$  болатыны анық, осыдан эквивалент тудырмайтын, 2.1.6 Тұжырымына қайшы келетін  $q''$ -тұрақты дөңес дұрыс формуланы аламыз.

**Анықтама 2.2.3.** [8]  $M$  әлсіз о-минималды құрылым болсын,  $D \subseteq M$  шексіз және  $f: D \rightarrow M$  функция болсын. Егер кез келген  $x \in D$  үшін шексіз  $J \subseteq D$  интервалы болса,  $D$  - да  $f$  локалды өседі (локалды түрде азаяды, локалды

тұрақты) сондықтан  $J$  -де  $f$  қатаң түрде өседі (қатаң кемиді, тұрақты).

Сондай-ақ, егер  $f$   $D$  бойынша локалды өссе немесе локалды кемісе  $f$  функциясын  $D \subseteq M$  жиынында жергілікті монотонды деп айтамыз.

$f$   $D \subseteq M$  бойынша  $A$  -анықталатын функция және  $E$   $D$  бойынша  $A$  -анықталатын эквиваленттік қатынас болсын. Егер кез келген  $a, b \in D$  үшін,  $a < b$  және  $\neg E(a, b)$  шарттарымен  $f(a) < f(b)$  ( $f(a) > f(b)$ ) болатын болса,  $D/E$  бойынша  $f$  қатаң өседі (кемиді).

**Тұжырым 2.2.4.** [43]  $M$  әлсіз о-минималды құрылым,  $A \subseteq M$ ,  $p \in S_1(A)$  алгебралық емес тип болсын. Сонда анықтау облысы  $p(M)$  жиынын қамтитын кез келген  $A$ -анықталатын функция  $p(M)$  бойынша локалды монотонды немесе локалды тұрақты болады.

**Лемма 2.2.5.**  $T$  дерлік  $\omega$ -категориялық әбден о-минималды теория,  $M \models T$ ,  $p, q \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес болсын,  $p \perp^w q$ ,  $a \in p(M)$ ,  $b \in q(M)$ ,  $q' := tp(b/\{a\})$ .  $q'(M) \subseteq Dom(f)$  және  $f$   $q'(M)$  бойынша тұрақты болмайтын,  $\{a\}$ -анықталатын  $f$  функциясы бар деп алайық. Сонда,  $q'(M)$  дөңес кластардың шексіз санына бөлетін  $\emptyset$ -анықталатын эквиваленттік қатынас  $E(x, y)$  болады, сондықтан  $f q'(M)/E$  бойынша қатаң монотонды.

Дәлелі.  $p$  және  $q$  әлсіз ортогональдылығына байланысты  $q'(M) = q(M)$  болады.  $f$   $q'(M)$  бойынша тұрақты емес болғандықтан,  $q'(M)$  шексіз дөңес кластардың шексіз санына бөлетін  $\{a\}$ -анықталатын  $E'_a(x, y)$  эквиваленттік қатынасы бар, сондықтан  $f q'(M)/E'_a$  бойынша қатаң монотонды. Керісінше делік:  $E'_a$   $\emptyset$ -анықталмайтын болсын.  $n < \omega$  орындалатындай  $RC_{bin}(q) = n$  бар. Сонда  $\emptyset$ -анықталатын  $E_1(x, y), \dots, E_{n-1}(x, y)$  формулалары  $\emptyset$ -анықталатын тривиальды емес эквиваленттік қатынастардың толық тізімін құрайды, олардың әрқайсысы  $q(M)$  мәнін шексіз дөңес кластардың шексіз санына бөледі, сондықтан  $E_i$  әрбір  $1 \leq i \leq n - 2$  үшін  $E_{i+1}$  нақтылайды. Сонда кейбір  $i \leq n - 2$  үшін  $E'_a(b, M) \subset E_1(b, M)$  немесе  $E_i(b, M) \subset E'_a(b, M) \subset E_{i+1}(b, M)$  болады, немесе барлық  $b \in q'(M)$  үшін  $E_{n-1}(b, M) \subset E'_a(b, M)$  орындалады. Жалпы алғанда, біріншіні алсақ. Сонда:

$$M \models b < b' < b'' \wedge E'_a(b, b') \wedge \neg E'_a(b', b'') \wedge E_1(b, b'') \quad (2.13)$$

орындалатындықтай  $b, b', b'' \in q'(M)$  болады, яғни  $tp(\langle b, b' \rangle / \emptyset) = tp(\langle b, b'' \rangle / \emptyset)$ , бірақ  $tp(\langle a, b, b' \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle a, b, b'' \rangle / \emptyset)$ , бұл қайшылық.

$A \subseteq B \subseteq M$ ,  $B$  шекті,  $p_1, p_2, \dots, p_s \in S_1(A)$  алгебралық емес болсын. Егер әрбір  $\langle a_1, \dots, a_s \rangle \in p_1(M) \times \dots \times p_s(M)$   $s$  -кортежі  $B$  бойынша бір типті қанағаттандыратын болса, 1-типті  $\{p_1, \dots, p_s\}$  тобы  $B$  бойынша әлсіз ортогональды болады деп айтамыз. Кез келген тізбегі  $(n_1, \dots, n_s) \in \omega^s$  үшін,  $\bar{a}_s, \bar{a}'_s \in [p_s(M)]^{n_s}$  өсетін кортеждер  $tp(\bar{a}_1/B) = tp(\bar{a}'_1/B)$ ,  $\dots$ ,  $tp(\bar{a}_s/B) = tp(\bar{a}'_s/B)$  болатындай  $tp(\langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_s \rangle / B) = tp(\langle \bar{a}'_1, \dots, \bar{a}'_s \rangle / B)$  болса,  $\{p_1, \dots, p_s\}$  1 типті тобы  $B$  бойынша ортогональ деп айтамыз.

Егер  $A \subseteq M$ ,  $p_1, p_2 \in S_1(A)$  және  $p_1 \perp^w p_2$  орындалса, онда  $\{p_1, p_2\}$   $A$  -ға карағанда әлсіз ортогональ екені анық.

**Лемма 2.2.6.**  $T$  дерлік  $\omega$ -категориялық әбден о-минималды теория болсын,

$p_1, \dots, p_m \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес жұптық әлсіз ортогональды типтері болсын. Сонда  $\{p_1, \dots, p_m\}$   $\emptyset$  шамасында әлсіз ортогональ болады.

Лемманы 2.2.6 дәлелдеу.  $m \geq 2$  бойынша индукция арқылы дәлелдейік. Қадамы  $m = 2$  анық. Лемма  $m - 1$  типтер жиыны үшін орнатылған деп есептейік.  $m$  типті жиындар үшін лемманы дәлелдеп көрейік.  $\langle a_1, a_2, \dots, a_{m-3} \rangle \in p_1(M) \times p_2(M) \times \dots \times p_{m-3}(M)$  ерікті кортежін қарастырайық және  $T' = T(a_1, a_2, \dots, a_{m-3})$  болсын.  $p_{m-2}, p_{m-1}$  және  $p_m$  типтерін қарастырайық.  $T'$  дерлік  $\omega$ -категориялық толығымен о-минималды теория екенін көру оңай. Индукциялық гипотеза бойынша  $\{a_1, a_2, \dots, a_{m-3}\}$  дейін олардың жалғыз кеңейтімдері бар, сонымен қатар  $p_{m-2}(M) = p'_{m-2}(M)$ ,  $p_{m-1}(M) = p'_{m-1}(M)$ , және  $p_m(M) = p'_m(M)$ .

Индуктивті болжам сонымен қатар олардың жұптық әлсіз ортогональды екендігін айтады. Белгілеуге ыңғайлы болу үшін  $p'_{m-2}, p'_{m-1}$  және  $p'_m$  сәйкесінше  $p_1, p_2$  және  $p_3$  арқылы, сонымен қатар  $\{p_1, p_2, p_3\}$   $\emptyset$  - бойынша әлсіз ортогональды екенін көрсетеміз яғни  $\{p'_{m-2}, p'_{m-1}, p'_m\}$   $\{a_1, a_2, \dots, a_{m-3}\}$  бойынша әлсіз ортогональ.  $\{a_1, a_2, \dots, a_{m-3}\}$  таңдай отырып  $\{p_1, \dots, p_m\}$   $\emptyset$  - бойынша әлсіз ортогональды деген қорытындыға келеміз.

Керісінше:  $tp(\langle a, b, c \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle a', b', c' \rangle / \emptyset)$  теңсіздігі болатындай  $\langle a, b, c \rangle, \langle a', b', c' \rangle \in p_1(M) \times p_2(M) \times p_3(M)$  кортеждері бар. Өйткені  $p_1, p_2$  және  $p_3$  жұпты әлсіз ортогональды болғандықтан,  $tp(\langle a, b \rangle / \emptyset) = tp(\langle a', b' \rangle / \emptyset)$ ,  $tp(\langle a, c \rangle / \emptyset) = tp(\langle a', c' \rangle / \emptyset)$  және  $tp(\langle b, c \rangle / \emptyset) = tp(\langle b', c' \rangle / \emptyset)$ . Сонда 2.2.1 леммасы бойынша  $tp(\langle b, c \rangle / \emptyset) = tp(\langle b, c'' \rangle / \emptyset)$ ,  $tp(\langle a, b, c \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle a, b, c'' \rangle / \emptyset)$  және  $tp(\langle a, c \rangle / \emptyset) = tp(\langle a, c'' \rangle / \emptyset)$  болатындай  $c'' \in p_3(M)$  болады.

$p'_1 := tp(a/\{b\})$ ,  $p'_3 := tp(c/\{b\})$  болсын.  $p_1, p_2$  және  $p_3$  типтерінің жұптық әлсіз ортогональдылығына байланысты  $p'_1(M) = p_1(M)$  және  $p'_3(M) = p_3(M)$  болады. Демек,  $c'' \in p'_3(M)$ , ол  $p'_1 \not\leq^w p'_3$ . Сонда әбден о-минималдылыққа байланысты  $\{b\}$ -анықталатын  $f_b: p'_1(M) \rightarrow p'_3(M)$  биекциясы болады.

Осылайша,  $f_b(a) = c_0$  болатындай  $c_0 \in p'_3(M)$  бар, яғни  $c_0 \in dcl(\{a, b\})$ . Лемма 2.2.5 бойынша  $p_2(M)$  дөңес кластарды шексіз санға бөлетін  $\emptyset$ -анықталатын  $E(x, y)$  эквиваленттік қатынасы болады, сондықтан  $f_b$   $p_1(M)/E$  бойынша қатаң монотонды болады. Жалпы алғанда,  $f_b$   $p_1(M)/E$  бойынша қатаң өседі деп есептейік.  $a < a_1$  және  $\neg E''(a, a_1)$  шартымен  $a_1 \in p_1(M)$  алып және келесі формулаларды қарастырамыз:

$$\Phi_1(y, a, a_1, b) := f_b(a) = f_y(a_1) \quad (2.14)$$

$$\Phi_n(y, a, a_1, b) := \exists y_0 (\Phi_{n-1}(y_0, a, a_1, b) \wedge f_{y_0}(a) = f_y(a_1)), \quad n \geq 2 \quad (2.15)$$

$$\text{Әрбір } n < \omega \text{ үшін } M \models \exists! y \Phi_n(y, a, a_1, b)$$

$$\dots < \Phi_n(M, a, a_1, b) < \dots < \Phi_2(M, a, a_1, b) < \Phi_1(M, a, a_1, b) < b \quad (2.16)$$

Сонда әрбір  $n \in \omega$  үшін келесі формулалар жиынын қарастырсақ:

$$p_2(x_1) \cup p_1(x_2) \cup p_1(x_3) \cup p_2(x_4) \cup \{x_2$$

$$< x_3 \wedge \neg E''(x_2, x_3)\} \cup \{\Phi_n(x_1, x_2, x_3, x_4)\} \quad (2.17)$$

Бұлар локалды бірге. Сонда,  $T'$ ның дерлік  $\omega$ -категориялық сипатына қайшы  $q_1(x_1) := p_2(x_1), q_2(x_2) := p_1(x_2), q_3(x_3) := p_1(x_3), q_4(x_4) := p_2(x_4)$  шексіз болатындай  $(q_1, q_2, q_3, q_4)$ -типтер санын аламыз.

**Теорема 2.2.7.**  $T$  дерлік  $\omega$ -категориялық әбден о-минималды теория болсын,  $p_1, \dots, p_m \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес жұптық әлсіз ортогональды типтер. Сонда  $\{p_1, \dots, p_m\} \emptyset$  бойынша ортогональды.

2.2.7. Теоремасын Дәлелдеу.  $m \geq 2$  бойынша индукция арқылы дәлелдейік.

Қадам 2.  $tp(\bar{a}/\emptyset) = tp(\bar{a}'/\emptyset), tp(\bar{b}/\emptyset) = tp(\bar{b}'/\emptyset)$  болатындай кез келген өспелі

$$\bar{a} = \langle a_1, a_2, \dots, a_{n_1} \rangle, \bar{a}' = \langle a'_1, a'_2, \dots, a'_{n_1} \rangle \in [p_1(M)]^{n_1} \quad (2.18)$$

$$\bar{b} = \langle b_1, b_2, \dots, b_{n_2} \rangle, \bar{b}' = \langle b'_1, b'_2, \dots, b'_{n_2} \rangle \in [p_2(M)]^{n_2} \text{ үшін } (n_1, n_2)$$

индукция арқылы дәлелдеп көрейік.  $(1,1)$  жағдайы тривиальды. 2-қадам кез келген  $(k_1, k_2) <_{lex} (n_1, n_2)$  үшін орнатылған деп есептейік және оны  $(n_1, n_2)$  үшін дәлелдейік. Керісінше делік:  $tp(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}', \bar{b}' \rangle / \emptyset)$  алайық.  $p_1$  және  $p_2$  типтерінің әлсіз ортогональдылығына байланысты барлық  $1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2$  үшін  $tp(\langle a_i, b_j \rangle / \emptyset) = tp(\langle a'_i, b'_j \rangle / \emptyset)$  орындалады. Сонда, барлық  $1 \leq i \leq n_1$  және  $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n_2-1}, b_{n_2} \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n_2-1}, b''_{n_2} \rangle / \emptyset)$  үшін лемма 2.2.1 бойынша  $tp(\langle \bar{b}_{n_2-1}, b_{n_2} \rangle / \emptyset) = tp(\langle \bar{b}_{n_2-1}, b''_{n_2} \rangle / \emptyset), tp(\langle a_i, b_{n_2} \rangle / \emptyset) = tp(\langle a_i, b''_{n_2} \rangle / \emptyset)$  орындалатындай  $b''_{n_2} \in p_2(M)$  болады.

$A := \{\bar{a}_{n_1-1}, \bar{b}_{n_2-2}\}$  болсын. Индукциялық гипотеза бойынша  $tp(\langle b_{n_2-1} : b_{n_2} \rangle / A) = tp(\langle b_{n_2-1}, b''_{n_2} \rangle / A)$  бар.

1 Жағдай.  $tp(b_{n_2-1}/A) = tp(b_{n_2}/A)$ .  $p'_1(x) := tp(a_{n_1}/A)$ ,  $p'_2(y) := tp(b_{n_2-1}/A)$  болсын. Сондай-ақ, индукциялық гипотеза бойынша  $p'_1 \perp^w p'_2$  болсын және Лемма 2.2.2 бойынша, бізде  $tp(\langle a_{n_1}, b_{n_2-1}, b_{n_2} \rangle / A) = tp(\langle a_{n_1}, b_{n_2-1}, b''_{n_2} \rangle / A)$  бар, ол біздің болжамымызға қайшы.

2 Жағдай.  $tp(b_{n_2-1}/A) \neq tp(b_{n_2}/A)$ .  $p'_1$  және  $p'_2$  1-жағдайдағыдай болсын және  $p'_3(z) := tp(b_{n_2}/A)$  болсын. Индукциялық гипотеза бойынша  $p'_1 \perp^w p'_2, p'_1 \perp^w p'_3$ , және демек  $p'_2 \perp^w p'_3$ . Сонда Лемма 2.2.6 бойынша  $tp(\langle a_{n_1}, b_{n_2-1}, b_{n_2} \rangle / A) = tp(\langle a_{n_1}, b_{n_2-1}, b''_{n_2} \rangle / A)$ , бұл болжамға қайшы.

Қадам  $m$ . Теорема кез келген  $k \leq m - 1$  үшін 1 типті  $k$  жиындарға арналған деп есептейік және оны 1 типті  $m$  жиындар үшін дәлелдендейік. Лемма 2.2.6 бойынша  $n_1 = 1, n_2 = 1, \dots, n_m = 1$  жағдайлары орындалады.  $m$  қадамы барлық  $(k_1, k_2, \dots, k_m) <_{lex} (n_1, n_2, \dots, n_m)$  жағдайларына арналған және оны  $(n_1, n_2, \dots, n_m)$  үшін дәлелдейік.

$\bar{a}_{n_1} \in [p_1(M)]^{n_1}$ ,  $\bar{a}_{n_2} \in [p_2(M)]^{n_2}$ , ...,  $\bar{a}_{n_{m-2}} \in [p_{m-2}(M)]^{n_{m-2}}$  ерікті өсетін кортеждерді алайық. Индукциялық болжам  $p_{m-1}$  және  $p_m$  - ны сәйкесінше  $p'_{m-1}$  және  $p'_m$  типтеріне  $\{\bar{a}_{n_1}, \bar{a}_{n_2}, \dots, \bar{a}_{n_{m-2}}\}$  бойынша бірегей кеңейтімдерге ие екендігін көрсетеді, яғни  $p_{m-1}(M) = p'_{m-1}(M)$ ,  $p_m(M) = p'_m(M)$ .  $M' = \langle M, \bar{a}_{n_1}, \bar{a}_{n_2}, \dots, \bar{a}_{n_{m-2}} \rangle$  болсын. Индуктивті болжам сонымен қатар  $p'_{m-1}$  және  $p'_m$   $M'$  - де әлсіз ортогональ екендігін көрсетеді. 2-қадамға сәйкес,  $\{p'_{m-1}, p'_m\}$   $M'$  - де  $\emptyset$  ортогональ, демек  $\{p_{m-1}, p_m\}$   $M$  де  $\{\bar{a}_{n_1}, \bar{a}_{n_2}, \dots, \bar{a}_{n_{m-2}}\}$  бойынша ортогональ.  $\{\bar{a}_{n_1}, \bar{a}_{n_2}, \dots, \bar{a}_{n_{m-2}}\}$  ерікті болғандықтан,  $\{p_1, \dots, p_m\}$   $\emptyset$  -жибойынша ортогональ болады.

**Мысал 2.2.8. [50]**  $\mathcal{M} = \langle M; <, P_1^1, P_2^1, P_3^1, f^2 \rangle$  сызықты реттелген құрылымы, яғни  $P_1(\mathcal{M}) < P_2(\mathcal{M}) < P_3(\mathcal{M})$  болғанда,  $M$  -  $P_1, P_2$  және  $P_3$  унарлы предикаттардың интерпретацияларының ажырамас бірлестігуі болсын.  $P_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) әрбір интерпретациясын әдеттегідей реттелген  $\mathbb{Q}$  рационал сандар жиынымен анықтаймыз.  $f$  символы  $Dom_R(f) = P_1(\mathcal{M}) \times P_2(\mathcal{M})$  және  $Range_R(f) = P_3(\mathcal{M})$  арқылы ішінара бинарлы функциямен түсіндіріледі және барлық  $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  үшін  $f(a, b) = a + b$  түсіндіріледі.

$Th(M)$  толық о-минималды теория екенін дәлелдеуге болады. Әрбір ақырлы  $A \subseteq M$  жиыны үшін саналымды жиындардан аз  $A$  бойынша 1-типті есептелетін жиын бар болғандықтан,  $Th(M)$  кіші теория деген қорытындыға келеміз. Әрбір  $1 \leq i \leq 3$  үшін  $p_i(x) := \{P_i(x)\}$  болсын. Әрбір  $1 \leq i \leq 3$  үшін  $p_i \in S_1(\emptyset)$  болатыны анық.  $p_1, p_2$  және  $p_3$  типтері жұптық әлсіз ортогональды, бірақ  $\{p_1, p_2, p_3\}$   $\emptyset$  бойынша ортогональ емес.

## 2.3 Бинарлылық

**Анықтама 2.3.1. [57]**  $p \in S_1(\emptyset)$  жай тип деп аталады, егер барлық  $n \in \omega$  үшін  $f(x_1, \dots, x_n)$  тривиальды емес  $\emptyset$ -анықталатын  $n$ - арлық функция және  $a_1, \dots, a_n$  кортежі  $p$  типін жүзеге асырытын болса.

**Анықтама 2.3.2. [58]**  $p \in S_1(A)$  алгебралық емес болсын. Егер әрбір  $n < \omega$  және  $\bar{b} = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ ,  $\bar{b}' = \langle b'_1, \dots, b'_n \rangle \in [p(M)]^n$  өсетін кортеждері барлық  $1 \leq i < j \leq n$  үшін  $tp(\langle b_i, b_j \rangle / A) = tp(\langle b'_i, b'_j \rangle / A)$  орындалатындай  $tp(\bar{b} / A) = tp(\bar{b}' / A)$  болса онда  $p$  типін  $A$  бойынша бинарлы деп атаймыз. Егер  $p \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес, ал  $p$   $\emptyset$  бойынша бинарлы болса,  $p$  типін бинарлы деп айтамыз.

**Тұжырым 2.3.3.**  $T$  дерлік  $\omega$ -категориялық әбден о-минималды теория және  $p \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес теория болсын. Сонда  $T$  бинарлы болады.

Дәлелдеуі. Кез келген  $s < \omega$  және барлық  $1 \leq i < j \leq s$  үшін  $tp(\langle b_i, b_j \rangle / \emptyset) = tp(\langle b'_i, b'_j \rangle / \emptyset)$  болатындай кез келген өспелі кортеждері үшін  $\bar{b} = \langle b_1, \dots, b_s \rangle$ ,  $\bar{b}' = \langle b'_1, \dots, b'_s \rangle \in [p(M)]^s$  болады, сонда  $tp(\bar{b} / \emptyset) = tp(\bar{b}' / \emptyset)$  шығады.

Керісінше делік: барлық  $1 \leq i < j \leq s$  және  $tp(\bar{b} / \emptyset) \neq tp(\bar{b}' / \emptyset)$  үшін  $tp(\langle b_i, b_j \rangle / \emptyset) = tp(\langle b'_i, b'_j \rangle / \emptyset)$   $\bar{b} = \langle b_1, \dots, b_s \rangle$  болатындай,  $\bar{b}' = \langle b'_1, \dots, b'_s \rangle \in [p(M)]^s$  өсетін кортеждері бар,  $s$  — осындай қасиеттерімен минималды.

$s$  минималды болғандықтан,  $tp(\langle b_1, \dots, b_{s-1} \rangle / \emptyset) = tp(\langle b'_1, \dots, b'_{s-1} \rangle / \emptyset)$

болады. Сонда Лемма 2.2.1 бойынша барлық  $1 \leq i < s$  үшін  $tp(\langle b_i, b_s \rangle / \emptyset) = tp(\langle b_i, b''_s \rangle / \emptyset)$  және  $tp(\langle b_1, \dots, b_{s-1}, b_s \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle b_1, \dots, b_{s-1}, b''_s \rangle / \emptyset)$  болатындай  $b''_s \in p(M)$  болады.

Лемма 2.1.9 негізінде  $RC_{bin}(p) < \omega$ , сондықтан  $k < \omega$  және  $\emptyset$ -анықталатын  $E_1(x, y), \dots, E_k(x, y)$  шексіз дөңес класстардың шексіз санына бөлетін  $p(M)$  эквиваленттік қатынастар болады, сонымен қатар әрбір  $2 \leq i \leq k$  үшін  $E_i$  классы  $E_{i-1}$  классын  $E_i$  шексіз дөңес класстардың шексіз санына бөледі.

$E_0(x, y) := x = y$  болсын.

$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{s-1} \leq k$  орындалаындай  $i_1, i_2, \dots, i_{s-1}$  болатын натурал сандары бар және

$$\begin{aligned} M \models & E_{i_1}(b_1, b_2) \wedge \neg E_{i_1-1}(b_1, b_2) \wedge E_{i_2}(b_2, b_3) \wedge \neg E_{i_2-1}(b_2, b_3) \wedge \dots \\ & \dots \wedge E_{i_{s-2}}(b_{s-2}, b_{s-1}) \wedge \neg E_{i_{s-2}-1}(b_{s-2}, b_{s-1}) \\ & \wedge E_{i_{s-1}}(b_{s-1}, b_s) \wedge \neg E_{i_{s-1}-1}(b_{s-1}, b_s) \end{aligned} \quad (2.19)$$

орындалады.

$$p'(x) := p(x) \cup \{x < b_2\} \cup \{E_{i_1}(x, b_2) \wedge \neg E_{i_1-1}(x, b_2)\} \quad (2.20)$$

$$p''(x) := p(x) \cup \{x > b_{s-1}\} \cup \{E_{i_{s-1}}(x, b_{s-1}) \wedge \neg E_{i_{s-1}-1}(x, b_{s-1})\} \quad (2.21)$$

$s$  минималды болғандықтан,  $p', p'' \in S_1(\{b_2, \dots, b_{s-1}\})$  орындалады. Өйткені  $b_1 \in p'(M)$ ,  $b_s, b''_s \in p''(M)$  болғандықтан,  $p' \not\leq^w p''$  болады. Әбден о-минималдықтың арқасында,  $\{b_2, \dots, b_{s-1}\}$  - анықталатын  $f: p'(M) \rightarrow p''(M)$  биекциясы бар, демек,  $b_s^0 \in dcl(\{b_1, b_2, \dots, b_{s-1}\})$  болатындай  $b_s^0 \in p''(M)$  болады.

Жағдай 1:  $i_1 < i_2 < \dots < i_{s-1}$ .

Төмендегі формулалар жинағын қарастырайық:

$$p_0(x) := p(x) \cup \{x < b_3\} \cup \{E_{i_2}(x, b_3) \wedge \neg E_{i_2-1}(x, b_3)\}. \quad (2.22)$$

$p_0 \in S_1(\{b_3, \dots, b_{s-1}, b_s^0\})$  растаймыз. Сонда  $b_1, b_2 \in p_0(M)$  және  $b_2 \in dcl(\{b_1, b_3, \dots, b_{s-1}, b_s^0\})$  болады. Демек,  $\{b_3, \dots, b_{s-1}, b_s^0\}$  анықталатын,

$$M \models \phi_1(b_1, b_2, b_3, \dots, b_{s-1}, b_s^0) \wedge \exists! y \phi_1(b_1, y, b_3, \dots, b_{s-1}, b_s^0) \quad (2.23)$$

орындалатын  $\phi_1(x_1, x_2, b_3, \dots, b_{s-1}, b_s^0)$  формуласы бар.

$$\phi_n(x, y, b_3, \dots, b_{s-1}, b_s^0):$$

$$\exists t [\phi_{n-1}(x, t, b_3, \dots, b_{s-1}, b_s^0) \wedge \phi_1(t, y, b_3, \dots, b_{s-1}, b_s^0)] . \quad (2.24)$$

Сонда әрбір  $n \in \omega$  үшін келесі формулалар жиынын қарастырамыз:

$$p_0(x_1) \cup p_0(x_2) \cup p(x_3) \cup \dots \cup p(x_s) \cup \\ \cup \{x_1 < x_2 < \dots x_s\} \cup \{\phi_n(x_1, x_2, \dots, x_s)\} \quad (2.25)$$

Ол локалды бірге. Сондықтан  $(p_1, p_2, \dots, p_s)$ -типтерінің саны шексіз (мұндағы  $p_i(x_i) := p(x_i)$ ), бұл дерлік  $\omega$ -категориялыққа қайшы келеді.

2 Жағдай: кейбір  $1 \leq l \leq s - 1$  үшін  $i_l = i_{l+1}$ .

Келесі формулалар жинағын қарастырсақ:

$$p_0(x) := p(x) \cup \{x > b_l\} \cup \{x < b_{l+3}\} \cup \{E_{i_l}(x, b_l) \wedge \neg E_{i_{l-1}}(x, b_l)\}. \quad (2.26)$$

$p_0 \in S_1(\{b_1, \dots, b_l, b_{l+3}, \dots, b_{s-1}, b_s^0\})$  бар. Сонда  $b_{l+1}, b_{l+2} \in p_0(M)$  және  $b_{l+2} \in dcl(\{b_1, \dots, b_l, b_{l+1}, b_{l+3}, \dots, b_{s-1}, b_s^0\})$ . Осыдан дерлік  $\omega$ -категориялыққа қайшылықты аламыз.

**Қорытынды 2.3.4.**  $T$  дерлік  $\omega$ -категориялық әбден о-минималды теория,  $p \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес теория болсын. Сонда  $p$  жай тип.

**Лемма 2.3.5.**  $T$  дерлік  $\omega$ -категориялық әбден о-минималды теория,  $M \models T$ ,  $p_1, p_2 \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес болсын,  $p_1 \not\perp^w p_2$ . Сонда  $tp(\langle a, c_1 \rangle / \emptyset) = tp(\langle a, c_2 \rangle / \emptyset)$ ,  $tp(\langle b, c_1 \rangle / \emptyset) = tp(\langle b, c_2 \rangle / \emptyset)$  болатындай кез келген  $a \in p_1(M)$ ,  $b \in p_2(M)$  және  $c_1, c_2 \in M$  үшін  $tp(\langle a, b, c_1 \rangle / \emptyset) = tp(\langle a, b, c_2 \rangle / \emptyset)$  болады.

2.3.5 Лемманың дәлелі.  $p_1 \not\perp^w p_2$  болғандықтан, онда  $\emptyset$ -анықталатын  $g: p_1(M) \rightarrow p_2(M)$  биекциясы бар, осыдан  $g(a) = b_0$  және  $g^{-1}(b) = a_0$  болатындай  $a_0 \in p_1(M)$   $b_0 \in p_2(M)$  шығады.

Керісінше:  $tp(\langle a, c_1 \rangle / \emptyset) = tp(\langle a, c_2 \rangle / \emptyset)$ ,  $tp(\langle b, c_1 \rangle / \emptyset) = tp(\langle b, c_2 \rangle / \emptyset)$  және  $tp(\langle a, b, c_1 \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle a, b, c_2 \rangle / \emptyset)$  орындалатындай  $a \in p_1(M)$ ,  $b \in p_2(M)$  және  $c_1, c_2 \in M$  бар. Сонда  $a, b, c_1$  бос жиын бойынша жұптық алгебралық тәуелсіз болады.  $p'_1 := tp(a / \{b\})$ ,  $p'_3 := tp(c_1 / \{b\})$  болсын.  $c_2 \in p'_3(M)$  болғандықтан,  $p'_1 \not\perp^w p'_3$  мәнін аламыз. Демек,  $\{b\}$ -анықталатын  $f_b: p'_1(M) \rightarrow p'_3(M)$  биекциясы бар, мұнда  $f_b(a) = c_0$  болатындай  $c_0 \in p'_3(M)$  бар, яғни  $c_0 \in dcl(\{a, b\})$ . Алгебралық тұйықталуға ауыстыру принципі орындалатындықтан,  $c_0 \in dcl(\{b, b_0\}) \cap dcl(\{a, a_0\})$ . Егер  $c_1 \in p_2(M)$  болса, онда  $p_2$  қарапайым екендігіне қайшылық аламыз. Сол сияқты,  $c_1 \notin p_1(M)$  екенін түсінуге болады. Осылайша,  $c_1, c_2 \in p_3(M)$  болатындай  $p_3 \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес типі болады. Егер  $p_1 \perp^w p_3$  болса, онда  $p''_1 := tp(a / \{c_0\})$  қарастырамыз.  $p_1$  және  $p_3$   $p''_1(M) = p_1(M)$  әлсіз ортогональдылығына байланысты.  $a, a_0 \in p''_1(M)$  и  $c_0 \in dcl(a, a_0)$  болғандықтан,  $p''_1$  қарапайым емес екенін аламыз. Сондықтан,  $p_1 \not\perp^w p_3$  болсын. Сонда  $p_2 \not\perp^w p_3$  және  $\emptyset$ -анықталатын  $t: p_1(M) \rightarrow p_3(M)$  және  $r: p_2(M) \rightarrow p_3(M)$  биекциялары бар. Демек,  $t(a) = c'_0$  және  $r(b) = c''_0$  болатындай  $c'_0, c''_0 \in p_3(M)$  бар, мұнда  $c_0 \in dcl(\{c'_0, c''_0\})$  және  $p_3$  жай екендігіне қайшылық аламыз.

**Лемма 2.3.6.**  $T$  дерлік  $\omega$ -категориялық әбден о-минималды теория болсын,  $M \models T$ ,  $A \subseteq M$ ,  $A$  шекті,  $p_1, p_2, p_3 \in S_1(A)$  алгебралық емес болсын. Сонда  $tp(\langle a, b \rangle / A) = tp(\langle a', b' \rangle / A)$ ,  $tp(\langle a, c \rangle / A) = tp(\langle a', c' \rangle / A)$ ,  $tp(\langle b, c \rangle / A) = tp(\langle b', c' \rangle / A)$ .

$A) = tp(\langle b', c' \rangle / A)$  болатындай кез келген  $a, a' \in p_1(M)$ ,  $b, b' \in p_2(M)$ ,  $c, c' \in p_3(M)$  үшін  $tp(\langle a, b, c \rangle / A) = tp(\langle a', b', c' \rangle / A)$  болады.

Лемманы 2.3.6 дәлелдемесі. Керісінше делік:  $tp(\langle a, b, c \rangle / A) \neq tp(\langle a', b', c' \rangle / A)$  болсын. Сонда Лемма 2.2.1 бойынша  $tp(\langle a, c \rangle / A) = tp(\langle a, c' \rangle / A)$ ,  $tp(\langle b, c \rangle / A) = tp(\langle b, c'' \rangle / A)$  және  $tp(\langle a, b, c \rangle / A) \neq tp(\langle a, b, c'' \rangle / A)$  болатындай  $c'' \in p_3(M)$  бар. Егер  $p_1, p_2, p_3$  жұптық әлсіз ортогональ болса, онда Лемма 2.2.6-мен қайшылық бар.  $p_1, p_2, p_3$  жұптық әлсіз ортогональды емес деп есептейік,  $p_1 \not\perp^w p_2$  делік. Сонда Лемма 2.3.5-пен қайшылықты аламыз.

**Лемма 2.3.7.**  $T$  дерлік  $\omega$ -категориялық әбден о-минималды теория болсын,  $M \models T$ ,  $p_1, p_2 \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес,  $p_1 \not\perp^w p_2$ . Сонда кез келген  $n_1, n_2 < \omega$  және өспелі  $\bar{a} = \langle a_1, a_2, \dots, a_{n_1} \rangle$ ,  $\bar{a}' = \langle a'_1, a'_2, \dots, a'_{n_1} \rangle \in [p_1(M)]^{n_1}$ ,  $\bar{b} = \langle b_1, b_2, \dots, b_{n_2} \rangle$ ,  $\bar{b}' = \langle b'_1, b'_2, \dots, b'_{n_2} \rangle \in [p_2(M)]^{n_2}$  үшін  $tp(\bar{a}/\emptyset) = tp(\bar{a}'/\emptyset)$ ,  $tp(\bar{b}/\emptyset) = tp(\bar{b}'/\emptyset)$  және  $tp(\langle a_i, b_j \rangle / \emptyset) = tp(\langle a'_i, b'_j \rangle / \emptyset)$  болатындай барлық  $i, j$ :  $1 \leq i \leq n_1$  үшін  $tp(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle / \emptyset) = tp(\langle \bar{a}', \bar{b}' \rangle / \emptyset)$  бар.

Лемма 2.3.7.дәлелдемесі.  $(n_1, n_2)$  бойынша индукция арқылы дәлелдейік. Қадам (1,1) тривиальды. Лемма  $(k_1, k_2) <_{lex} (n_1, n_2)$  болатындай барлық  $(k_1, k_2)$  үшін белгіленген деп есептейік, және  $(n_1, n_2)$  үшін дәлелдейміз. Керісінше алғанда:  $tp(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}', \bar{b}' \rangle / \emptyset)$  делік. Барлық  $1 \leq i \leq n_1$  және

$$tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n_2-1}, b_{n_2} \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n_2-1}, b''_{n_2} \rangle / \emptyset) = tp(\langle a_i, b''_{n_2} \rangle / \emptyset) \quad (2.27)$$

орындалатындай  $b''_{n_2} \in p_2(M)$ .

$A := \{\bar{a}_{n_1-1}, \bar{b}_{n_2-2}\}$  болсын. Индукциялық гипотеза бойынша

$$tp(\langle b_{n_2-1}, b_{n_2} \rangle / A) = tp(\langle b_{n_2-1}, b''_{n_2} \rangle / A) \quad (2.28)$$

$p'_1 := tp(a_{n_1}/A)$ ,  $p'_2 := tp(b_{n_2-1}/A)$ . Егер  $tp(b_{n_2-1}/A) = tp(b_{n_2}/A)$  болса, онда  $p'_1 \not\perp^w p'_2$  болады, бұл 2.3.5 леммасына қайшы.  $tp(b_{n_2-1}/A) \neq tp(b_{n_2}/A)$  алып және  $p'_3 := tp(b_{n_2}/A)$  болсын. Сонда 2.3.6- Леммасына қайшылық аламыз.

**Теорема 2.3.8.**  $T$  дерлік  $\omega$ -категориялық әбден о-минималды теория болсын. Онда  $T$  теориясы бинарлы.

2.3.8 Теоремасын дәлелдеу. Ерікті натурал  $s < \omega$  санды аламыз,  $p_1, p_2, \dots, p_s \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес болсын.  $(s; n_1, n_2, \dots, n_s)$  бойынша индукция арқылы дәлелдейік, мұнда  $s \geq 2$ , кез келген  $n_1, n_2, \dots, n_s < \omega$  және барлық  $i_1, i_2, j, k$ :  $1 \leq i_1 < i_2 \leq s$ ,  $1 \leq j \leq n_{i_1}$ ,  $1 \leq k \leq n_{i_2}$

$$tp(\langle a_{i_1 j}, a_{i_2 k} \rangle / \emptyset) = tp(\langle a'_{i_1 j}, a'_{i_2 k} \rangle / \emptyset)$$

үшін  $tp(\bar{a}_1/\emptyset) = tp(\bar{a}'_1/\emptyset)$ ,  $tp(\bar{a}_2/\emptyset) = tp(\bar{a}'_2/\emptyset)$ , ...,  $tp(\bar{a}_s/\emptyset) = tp(\bar{a}'_s/\emptyset)$  болатындай кез келген өспелі

$\bar{a}_1, \bar{a}'_1 \in [p_1(M)]^{n_1}, \bar{a}_2, \bar{a}'_2 \in [p_2(M)]^{n_2}, \dots, \bar{a}_s, \bar{a}'_s \in [p_s(M)]^{n_s}$  үшін

$$tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_s \rangle / \emptyset) = tp(\langle \bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \dots, \bar{a}'_s \rangle / \emptyset) \quad (*) \quad (2.29)$$

$(2; n_1, n_2)$  жағдайын қарастырайық. Егер  $p_1 \perp^w p_2$  болса, онда 2.2.7 теоремасы бойынша  $\{p_1, p_2\} \emptyset$  ортогональды, яғни  $(*)$  орындалды. Егер  $p_1 \not\perp^w p_2$ , онда  $(*)$  Леммадан 2.3.7 шығады.

Теорема барлық  $(s; k_1, k_2, \dots, k_s) <_{lex} (s; n_1, n_2, \dots, n_s)$  үшін белгіленген деп есептейік және  $(s; n_1, n_2, \dots, n_s)$  үшін дәлелдейік. Керісінше делік:

$$tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_s \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}'_1 \dots \bar{a}'_{2-} \dots \bar{a}'_s \rangle / \emptyset).$$

Индукциялық гипотеза бойынша  $tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{s-1} \rangle / \emptyset) = tp(\langle \bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \dots, \bar{a}'_{s-1} \rangle / \emptyset)$ . Сонда

$$tp(\langle a_{sj}, a_{n_s} \rangle / \emptyset) = tp(\langle a_{ij}, a''_{n_s} \rangle / \emptyset) \quad (2.20)$$

$$tp(\langle a_{n_{s-1}}, a_{n_s} \rangle / \emptyset) = tp(\langle a_{n_{s-1}}, a''_{n_s} \rangle / \emptyset)$$

орындалатындай  $a''_{n_s} \in p_s(M)$  болады.

Барлық  $1 \leq i \leq s-1, 1 \leq j \leq n_i$  және

$$tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{s-1}, \bar{a}_{n_{s-1}}, a_{n_s} \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{s-1}, \bar{a}_{n_{s-1}}, a''_{n_s} \rangle / \emptyset) \quad (2.21)$$

$$A := \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{s-3}, \bar{a}_{n_{s-2}-1}, \bar{a}_{n_{s-1}-1}, \bar{a}_{n_s-1}\}$$

$$tp(\langle a_{n_{s-2}}, a_{n_{s-1}}, a_{n_s} \rangle / A) \neq tp(\langle a_{n_{s-2}}, a_{n_{s-1}}, a''_{n_s} \rangle / A) \quad (2.22)$$

Индукциялық гипотеза бойынша

$$tp(\langle a_{n_{s-2}}, a_{n_s} \rangle / A) = tp(\langle a_{n_{s-2}}, a''_{n_s} \rangle / A) \quad (2.23)$$

$$tp(\langle a_{n_{s-1}}, a_{n_s} \rangle / A) = tp(\langle a_{n_{s-1}}, a''_{n_s} \rangle / A) \quad (2.24)$$

$$p'_{s-2} := tp(a_{n_{s-2}} / A),$$

$$p'_{s-1} := tp(a_{n_{s-1}} / A),$$

$$p'_s := tp(a_{n_s} / A) \quad (2.25)$$

$p'_{s-1}$  және  $p'_s$  типтері алгебралық емес екені анық. Сонда 2.3.6 леммасы бойынша  $tp(\langle a_{n_{s-2}}, a_{n_{s-1}}, a_{n_s} \rangle / A) = tp(\langle a_{n_{s-2}}, a_{n_{s-1}}, a''_{n_s} \rangle / A)$ , біздің болжамымызға қайшы.

Бинарлы емес шағын толық о-минималды теория бар екенін ескереміз.

**Салдар 2.3.9.**  $T$  дерлік  $\omega$ -категориялық әбден о-минималды теория болсын. Сонда кез келген алгебралық емес  $p \in S_1(\emptyset)$  —ның шекті дөңес дәрежесі болады.

Дәлелдеу. 2.3.8 Теоремасы бойынша  $T$  бинарлы, кез келген 1-типті  $p$  үшін  $RC(p) = RC_{bin}(p)$ . 1.9 Леммасы бойынша  $RC(p) < \omega$  екенін аламыз.

### 3 ДЕРЛІК ОМЕГА - КАТЕГОРИЯЛЫҚ ӘЛСІЗ О-МИНИМАЛДЫ ТЕОРИЯЛАР ҮШІН БИНАРЛЫ ОҚШАУЛАУ ФОРМУЛАЛАРЫНЫҢ ТАРАЛУ АЛГЕБРАСЫ

#### 3.1.1. типті формулалар алгебралары

Мұнда [46, 59] жұмыстарында енгізілген бинарлы оқшаулау формулаларының алгебрасын қарастырамыз, мұнда бинарлы оқшаулау формуласына  $\varphi(x, y)$  типінің формуласы қарастырылады, сонда кейбір  $a$  параметрі үшін  $\varphi(a, y)$  формуласы  $S(\{a\})$  параметрінен кейбір толық типті оқшаулайды. Осы алгебраларға қатысты ұғымдар мен белгілерді [46, 59] жұмыстарынан табуға болады.

Саналымды категориялық әлсіз о-минималды теориялар үшін бинарлы оқшаулау формулаларының таралу алгебралары, сондай-ақ саналымды модельдердің аз саны бар әбден о-минималды теориялар үшін сәйкес алгебралар сипатталған. Сонымен қатар абель топтары үшін бинарлы оқшаулау формулаларының таралу алгебралары да сипатталған. Бұл тарауда дерлік  $\omega$ -категориялық әлсіз о-минималды теориялар үшін бинарлы оқшаулау формулаларының таралу алгебраларының сипаттамасы қарастырылады.

**Мысал 3.1.1.** Эренфойхтың белгілі мысалын қарастырайық:

$M = \langle \mathbb{Q}, <, c_k \rangle_{k \in \omega}$ ,  $c_k < c_{k+1}$  болатын әрбір  $k \in \omega$  және  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \infty$  үшін  $c_k < c_{k+1}$  болатын  $M = \langle \mathbb{Q}, <, c_k \rangle_{k \in \omega}$ , сызықты реттелген құрылымы болсын.

$$q_i(x) := \{c_i < x < c_{i+1}\}, i \geq 1, \quad (3.1)$$

$$p(x) := \{c_k < x \mid k \in \omega\} \quad q_0(x) := \{x < c_0\}$$

болсын. Әлбетте,  $q_0, q_i, p \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес және басқа алгебралық емес 1-типтер жоқ.  $q_0, q_i, i \geq 1$  - типтері оқшауланған және  $p$ - оқшауланбаған.

Белгілі болғандай, бұл теорияның дәл 3 саналымды моделі бар: бірінші жағдай –  $p$  типі жүзеге асырылмайды; екінші жағдай  $p(N) [0,1) \cap \mathbb{Q}$  реттік типке ие болатындай -  $N > M$  саналымды моделі бар; үшінші жағдай  $p(N) [0,1) \cap \mathbb{Q}$  реттік типке ие болатындай -  $N > M$  саналымды моделі бар.

Оқшауланған 1-типтердің әрқайсысы үшін бинарлы оқшаулау формулалары төмендегідей:

$$\theta_0(x, y) := x = y, \quad \theta_1(x, y) := x < y, \quad \theta_2(x, y) := x > y. \quad (3.2)$$

$p$  типі үшін  $\theta_0(x, y)$  және  $\theta_1(x, y)$  бинарлы оқшаулау формулалары болып қалады.  $\theta_2(x, y)$  формуласы енді  $p$  типі үшін оқшауланбайды. Бұл жағдайда  $\theta_1(x, y)$  формуласымен дәлелденетіндей, жартылай оқшаулау қатынасының асимметриясын  $SI_p$  [7,12] ескере отырып бұл формула үшін 1 белгісі теріс болады. Бұл белгіні  $-1$  деп белгілейік.  $\theta_{-1}(x, y)$  формуласымен бірге

$$\theta_{-1,-1}(x, y) := \exists z (\theta_{-1}(x, z) \wedge \theta_{-1}(z, y)) \quad (3.3)$$

$SI_p$  формуласының асимметриясын көрсетеді.  $Th(M)$  теориясында  $\theta_{-1,-1}(a, y)$  формуласы  $\theta_{-1}(a, y)$  формулаға тең. Бұл  $p$  типтің жүзеге асу жиынында  $\theta_{-1}(x, y) \vee (x \approx y)$  формуламен берілген қатынас шексіз тығыз ішінара ретті құрайтынын білдіреді. Осылайша, алгебра үшін Кейли кестесі  $\mathfrak{P}_{v(\{p\})}$  келесі кесте арқылы көрсетіледі:

Кесте 1- Кейли кестесі

|    |      |      |
|----|------|------|
| .  | 0    | -1   |
| 0  | {0}  | {-1} |
| -1 | {-1} | {-1} |

Әрбір  $i \geq 0$  үшін  $RC(p) = 1$  болғанда  $RC(q_i) = 1$  болатынын ескереміз. Бинарлы дөңес дәрежесі бар 1 -типті  $n$  үшін бинарлы оқшаулау формулаларының моноиды еркін санаулы категориялық әлсіз о-минималды теория болады.  $(P, \mathfrak{K}_0, n)$ -wom-моноиды  $\mathfrak{U}_n$  арқылы белгіленеді.

Кесте 2 -  $\mathfrak{U}_1$  моноиды

|   |     |         |         |
|---|-----|---------|---------|
| . | 0   | 1       | 2       |
| 0 | {0} | {1}     | {2}     |
| 1 | {1} | {1}     | {0,1,2} |
| 2 | {2} | {0,1,2} | {2}     |

Кесте 3 -  $\mathfrak{U}_2$  моноиды

|   |     |         |         |             |             |
|---|-----|---------|---------|-------------|-------------|
| . | 0   | 1       | 2       | 3           | 4           |
| 0 | {0} | {1}     | {2}     | {3}         | {4}         |
| 1 | {1} | {1}     | {0,1,2} | {3}         | {4}         |
| 2 | {2} | {0,1,2} | {2}     | {3}         | {4}         |
| 3 | {3} | {3}     | {3}     | {3}         | {0,1,2,3,4} |
| 4 | {4} | {4}     | {4}     | {0,1,2,3,4} | {4}         |

Егер  $\mathfrak{U}_n$  моноид құрастырылған болса, онда  $\mathfrak{U}_{n+1}$  кеңейтімі  $2n + 1$  және  $2n + 2$  белгілерін, сондай-ақ келесі кестеде берілген жиынтық  $\mathcal{P}(\{0,1,2,3,4, \dots, 2n + 2\}) \setminus \{\emptyset\}$  операцияны қосу арқылы беріледі: Осылайша, ұяшық моноидтер тізбегі түзіледі:  $\mathfrak{U}_n \subset \mathfrak{U}_{n+1}$ ,  $n \in \omega$ .

Анықтама бойынша әрбір оқшауланған  $q_i$  типі  $\mathfrak{U}_1$  алгебраға сәйкес келеді. Кесте 4 -  $q_i$  типті  $\mathfrak{U}_1$

|   |     |     |     |     |     |     |              |              |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--------------|--------------|
|   | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | ... | $2n + 1$     | $2n + 2$     |
| 0 | {0} | {1} | {2} | {3} | {4} | ... | { $2n + 1$ } | { $2n + 2$ } |

|        |          |          |          |             |             |     |                    |                    |
|--------|----------|----------|----------|-------------|-------------|-----|--------------------|--------------------|
| 1      | {1}      | {1}      | {0,1,2}  | {3}         | {4}         | ... | {2n + 1}           | {2n + 2}           |
| 2      | {2}      | {0,1,2}  | {2}      | {3}         | {4}         | ... | {2n + 1}           | {2n + 2}           |
| 3      | {3}      | {3}      | {3}      | {3}         | {0,1,2,3,4} | ... | {2n + 1}           | {2n + 2}           |
| 4      | {4}      | {4}      | {4}      | {0,1,2,3,4} | {4}         | ... | {2n + 1}           | {2n + 2}           |
| ...    | ...      | ...      | ...      | ...         | ...         | ... | ...                | ...                |
| 2n + 1 | {2n + 1} | {2n + 1} | {2n + 1} | {2n + 1}    | {2n + 1}    | ... | {2n + 1}           | {0,1, ..., 2n + 2} |
| 2n + 2 | {2n + 2} | {2n + 2} | {2n + 2} | {2n + 2}    | {2n + 2}    | ... | {0,1, ..., 2n + 2} | {2n + 2}           |

**Анықтама 3.1.2.**  $M$  әлсіз о-минималды құрылым және  $A \subseteq M$ ,  $p \in S_1(A)$  алгебралық емес болсын. Кез келген жеткілікті қаныққан  $N \succ M$  моделі үшін  $U_p(N)^- = p(N)^-$  ( $U_p(N)^+ = p(N)^+$ ) орындалып,  $A$  анықталатын дөңес  $U_p(x) \in p$  формуласы бар болса онда  $p$  оң жақ (сол жақ) квази - рационалды болады.

Оқшауланбаған 1-тип квазирационалды деп аталады, егер ол оң жақ немесе сол жақ квазирационалды болса. Квазирационалды емес оқшауланбаған 1-тип иррационал деп аталады.

Әлбетте, 1-тип бір уақытта оңға-квазирационалды және солға-квазирационалды болса ол оқшауланған болады.

**Тұжырым 3.1.3.** [24]  $T$  әлсіз о-минималды теория,  $M \models T$ ,  $A \subseteq M$ ,  $p, q \in S_1(A)$  алгебралық емес,  $p \not\leq^w q$  болсын. Сонда төмендегі шарттар орындалады:

(1)  $p$ - иррационалды  $\Leftrightarrow q$ - иррационалды;

(2)  $p$ - квазирационалды  $\Leftrightarrow q$ - квазирационалды.

Ерікті әлсіз о-минималды теориядағы  $n$  дөңес дәрежесі бар оң квазирационалды 1-типті бинарлы оқшауланған формулаларының моноиды (демек, берілген 1-типтің биналы дөңес дәрежесі  $n$ )  $(P, QR, n)$ -wom-моноид деп аталады және  $\mathfrak{U}_n^{QR}$  арқылы белгіленеді. Дәл осылай  $n$  дөңес дәрежесі бар сол жақ квазирационалды 1-тип үшін бинарлы оқшаулау формулаларының моноиды  $(P, QL, n)$ -wom-моноид деп аталады және  $\mathfrak{U}_n^{QL}$  арқылы белгіленеді.

$p$  типі оңға квазирационалды және 2 белгіден тұратын оқшаулау формулаларының  $\mathfrak{U}_1^{QR}$  алгебрасына сәйкес келеді.

$c_{k+1} < c_k$  шартымен әрбір  $k < \omega$  және  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = -\infty$  үшін талап етілетін Эренфойхтің мысалын өзгертетін болсақ, онда тип  $\mathfrak{U}_1^{QL}$  алгебра формулаларына сәйкес келетін квазирационалды солға  $p(x) := \{x < c_k | k \in \omega\}$  болады және 2 белгіден тұратын  $\theta_0(x, y)$  және  $\theta_2(x, y)$  оқшаулау формулалары болады.

3.1.1 - мысалда біз әрбір  $a \in M$  нүктені  $\mathbb{Q}^{n-1}$  көшірмесімен ауыстырамыз және жаңа бинарлы қатынастарды  $E_i(x, y)$  келесідегідей анықтаймыз: кез келген  $a_1 = (x_1, \dots, x_n), a_2 = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Q}^n$ , үшін

$$E_i(a_1, a_2) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_{n-i} = y_{n-i}. \quad (3.4)$$

Нәтижесінде  $M' = \langle \mathbb{Q}^n, <, c_k, E_1^2, \dots, E_{n-1}^2 \rangle_{k \in \omega}$  құрылымын аламыз. Сонымен қатар,  $E_{n-1}(x, y)$  қатынасы эквиваленттік қатынас болып табылады, ол  $M'$  -ді шексіз дөңес кластардың шексіз санына бөледі, сондықтан  $E_{n-1}$  - классындағы индукцияланған тәртіп соңғы нүктелері жоқ тығыз тәртіп. Әрбір  $1 \leq i \leq n-2$  үшін  $E_i$  қатынасы әрбір  $E_{i+1}$  - классты шексіз дөңес  $E_i$  ішкі класстарының шексіз санына бөлетін эквиваленттік қатынас болып табылады, осылайша ішкікластардағы индукцияланған тәртіп соңғы нүктелері жоқ тығыз тәртіп болып табылады.

$d_k$  ретінде кейбір  $(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}^{n-1}$  үшін  $\{q \in M' | q = (c_k, x_2, \dots, x_n)\}$  жиынының ерікті элементін анықтаймыз. Сонда  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = \infty$  болады.

$p(x) := \{d_k < x \wedge \neg E_{n-1}(d_k, x) | k \in \omega\}$  қарастырсақ.  $p \in S_1(\emptyset)$ ,  $RC(p) = n$  және  $p$  квази-рационалды оңға.  $p$  типі үшін бинарлы оқшаулау формулалары келесідегідей:

$$\theta(x, y) := x = y, \quad (3.5)$$

$$\theta_1(x, y) := x < y \wedge E_1(x, y), \quad (3.6)$$

$$\theta_2(x, y) := x > y \wedge E_1(x, y), \quad (3.7)$$

$$\theta_{2i-1}(x, y) := x < y \wedge E_i(x, y) \wedge \neg E_{i-1}(x, y), \quad (3.8)$$

$$\theta_{2i}(x, y) := x > y \wedge E_i(x, y) \wedge \neg E_{i-1}(x, y), \quad 2 \leq i \leq n-1 \quad (3.9)$$

$$\theta_{-1}(x, y) := x < y \wedge \neg E_{n-1}(x, y). \quad (3.10)$$

$p$  типі  $2n$  белгіден тұратын оқшаулау формулаларының  $\mathfrak{A}_n^{QR}$  алгебрасына сәйкес келеді, олардың көбейтіндісі кестемен берілген:

Кесте 5- оқшаулау формулалар

| .      | 0          | 1          | 2          | 3          | 4           | ... | $2n-3$              | $2n-2$              | -1   |
|--------|------------|------------|------------|------------|-------------|-----|---------------------|---------------------|------|
| 0      | {0}        | {1}        | {2}        | {3}        | {4}         | ... | { $2n-3$ }          | { $2n-2$ }          | {-1} |
| 1      | {1}        | {1}        | {0,1,2}    | {3}        | {4}         | ... | { $2n-3$ }          | { $2n-2$ }          | {-1} |
| 2      | {2}        | {0,1,2}    | {2}        | {3}        | {4}         | ... | { $2n-3$ }          | { $2n-2$ }          | {-1} |
| 3      | {3}        | {3}        | {3}        | {3}        | {0,1,2,3,4} | ... | { $2n-3$ }          | { $2n-2$ }          | {-1} |
| ...    | ...        | ...        | ...        | ...        | ...         | ... | ...                 | ...                 | {-1} |
| $2n-3$ | { $2n-3$ } | { $2n-3$ } | { $2n-3$ } | { $2n-3$ } | { $2n-3$ }  | ... | { $2n-3$ }          | {0,1, ..., $2n-2$ } | {-1} |
| $2n-2$ | { $2n-2$ } | { $2n-2$ } | { $2n-2$ } | { $2n-2$ } | { $2n-2$ }  | ... | {0,1, ..., $2n-2$ } | { $2n-2$ }          | {-1} |
| -1     | {-1}       | {-1}       | {-1}       | {-1}       | {-1}        | ... | {-1}                | {-1}                | {-1} |

$M'$  құрылымындағы және  $\theta$  формулаларындағы  $<$  белгісін  $>$  белгіге ауыстырып,

$$p(x) := \{x < d_k \wedge \neg E_{n-1}(d_k, x) | k \in \omega\} \quad (3.11)$$

типi үшін сол кестемен анықталған  $\mathfrak{A}_n^{QL}$  алгебрасын аламыз.

Жоғарыда келтірілген кестеге сәйкес,  $\mathfrak{A}_n^{QR}$  және  $\mathfrak{A}_n^{QL}$  алгебралары моноидтар екенін ескереміз.  $\mathfrak{A}_n^{QR}$  және  $\mathfrak{A}_n^{QL}$  моноидтерінде тиісінше теріс емес белгілер  $0, 1, \dots, 2n - 2$  және  $0, -1$  оң емес белгілер арқылы жасалған субмоноидтар бар.

**Мысал 3.1.4.**  $M = \langle \mathbb{Q}, <, c_k, c'_k \rangle_{k \in \omega}$ , мұндағы  $<$   $\mathbb{Q}$  рационал сандар жиынындағы қарапайым қатаң реттілік қатынасы,  $c_k$  тұрақтылары қатаң өсетін тізбекті құрайды, ал  $c'_k$  тұрақтылары кез келген  $k, l < \omega$  және  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \sqrt{2} = \lim_{l \rightarrow \infty} c'_l$  үшін  $c_k < c'_l$  қатаң кемімелі тізбекті құрайды. Теорияда  $Th(M)$  6 жұптық изоморфты емес саналымды модельдері бар.

$$p(x) := \{c_k < x \mid k \in \omega\} \cup \{x < c'_l \mid l \in \omega\} \quad (3.12)$$

$p \in S_1(\emptyset)$ ,  $RC(p) = 1$  және  $p$  иррационалды.  $p$  типі үшін бинарлы оқшаулау формуласы  $\theta_0(x, y) := x = y$  жалғыз формула болып табылады.

Дөңес  $n$  дәрежелі иррационалды 1-тип үшін бинарлы оқшаулау формулаларының моноиды ерікті әлсіз о-минималды теорияда  $(P, I, n)$ -wom - моноид деп аталады және  $\mathfrak{A}_n^I$  арқылы белгіленеді.

$p$  типі 1 белгіден тұратын оқшаулау формулаларының  $\mathfrak{A}_1^I$  алгебрасына сәйкес келеді.

3.1.4-мысалда біз әрбір  $a \in M$  нүктесін  $\mathbb{Q}^{n-1}$  көшірмесімен ауыстырамыз және 3.1.1-мысалды өзгерткеніміздей  $E_i(x, y)$  жаңа бинарлы қатынастарды анықтаймыз. Нәтижесінде  $M' = \langle \mathbb{Q}^n, <, c_k, c'_k, E_1^2, \dots, E_{n-1}^2 \rangle_{k \in \omega}$  құрылымын аламыз.

Кейбір  $(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}^{n-1}$  үшін  $q \in M' \mid q = (c_k, x_2, \dots, x_n)$  және

кейбір  $(y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{Q}^{n-1}$  үшін  $\{q \in M' \mid q = (c'_l, y_2, \dots, y_n)\}$  аламыз

сәйкесінше. Сонда  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = \lim_{l \rightarrow \infty} d'_l$  болады. Әрине,  $Th(M')$  дерлік  $\omega$ -категориялық әлсіз о-минималды теория, өйткені барлық 1-типтері әлсіз ортогональды.

$$p(x) := \{d_k < x < d'_l \wedge \neg E_{n-1}(d_k, x) \wedge \neg E_{n-1}(d'_l, x) \mid k, l \in \omega\}$$

қарастырсақ. Әрине,  $p \in S_1(\emptyset)$ ,  $RC(p) = n$  және  $p$  иррационал.  $p$  типі үшін бинарлы оқшаулау формулалары төмендегідей:

$$\theta_0(x, y) := x = y,$$

$$\theta_1(x, y) := x < y \wedge E_1(x, y), \quad (3.13)$$

$$\theta_2(x, y) := x > y \wedge E_1(x, y), \quad (3.14)$$

$$\theta_{2i-1}(x, y) := x < y \wedge E_i(x, y) \wedge \neg E_{i-1}(x, y), \quad (3.15)$$

$$\theta_{2i}(x, y) := x > y \wedge E_i(x, y) \wedge \neg E_{i-1}(x, y), \quad 2 \leq i \leq n-1. \quad (3.16)$$

$p$  типі  $2n-1$  белгілерден тұратын оқшаулау формулаларының  $\mathfrak{A}_n^I$  алгебрасына сәйкес келетінін растаймыз, олардың көбейтіндісі кестеде берілген:

Кесте 6 – оқшаулау формулалары

| .      | 0          | 1          | 2          | 3           | 4           | ... | $2n-3$             | $2n-2$             |
|--------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-----|--------------------|--------------------|
| 0      | {0}        | {1}        | {2}        | {3}         | {4}         | ... | { $2n-3$ }         | { $2n-2$ }         |
| 1      | {1}        | {1}        | {0,1,2}    | {3}         | {4}         | ... | { $2n-3$ }         | { $2n-2$ }         |
| 2      | {2}        | {0,1,2}    | {2}        | {3}         | {4}         | ... | { $2n-3$ }         | { $2n-2$ }         |
| 3      | {3}        | {3}        | {3}        | {3}         | {0,1,2,3,4} | ... | { $2n-3$ }         | { $2n-2$ }         |
| 4      | {4}        | {4}        | {4}        | {0,1,2,3,4} | {4}         | ... | { $2n-3$ }         | { $2n-2$ }         |
| ...    | ...        | ...        | ...        | ...         | ...         | ... | ...                | ...                |
| $2n-3$ | { $2n-3$ } | { $2n-3$ } | { $2n-3$ } | { $2n-3$ }  | { $2n-3$ }  | ... | { $2n-3$ }         | {0,1,..., $2n-2$ } |
| $2n-2$ | { $2n-2$ } | { $2n-2$ } | { $2n-2$ } | { $2n-2$ }  | { $2n-2$ }  | ... | {0,1,..., $2n-2$ } | { $2n-2$ }         |

$\mathfrak{A}_n^I$  алгебрасының  $(P, \mathfrak{K}_0, n)$ -wom-monoid  $\mathfrak{A}_{n-1}$  үшін изоморфты екенін көру оңай.

**Мысал 3.1.5.**  $M = \langle Q, =, <, R^2 \rangle$  алсақ, мұндағы  $M$  сызықтық реттелген құрылым,  $Q$  рационал сандар жиыны

$$M \models R(b, a) \Leftrightarrow a \leq b < a + \sqrt{2} \quad (3.17)$$

Кез келген  $a, b \in M$  сәйкесінше

$$R(M, a) = \{b \in M \mid a \leq b < a + \sqrt{2}\} \text{ және}$$

$$R(a, M) = \{b \in M \mid a - \sqrt{2} < b \leq a\}. \quad (3.18)$$

Әрбір  $n < \omega$  үшін келесі формулаларды қарастырсак:

$$R^n(x, y) := \exists z_1, \dots, z_n [R(z_1, y) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < n} R(z_{i+1}, z_i) \wedge R(x, z_n)]. \quad (3.19)$$

Кез келген  $a, b \in M$  үшін

$$R^n(b, a) \Leftrightarrow a \leq b < a + (n+1)\sqrt{2} \quad (3.20)$$

Орындалатынын көруге болады.

Сәйкесінше , кез келген  $a \in M$  үшін

$$R(M, a) \subset R^1(M, a) \subset \dots \subset R^n(M, a) \subset \dots \quad (3.21)$$

яғни,  $Th(M)$  дерлік  $\omega$  категориялық емес болсын. Қосымша атомдық формулаларды қоса, әрбір  $n < \omega$  үшін  $R^n(x, y)$  формулаларын, базистік деп атаймыз. Стандартты аргументтер арқылы  $Th(M)$  осы базисті формулаларға қатысты квантордың элиминацисын жасайды, сәйкесінше  $Th(M)$  әлсіз о-минималды.

**Теорема 3.1.6.**  $T$   $\omega$ -категориялық дерлік әлсіз о-минималды теория болсын,  $p \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес тип болсын,  $RC_{bin}(p) = n$ . Сонда:

(1) егер  $p$  оқшауланған болса, онда  $\mathfrak{F}_{v(p)}$  алгебрасы  $2n + 1$  белгіден тұратын  $(P, \aleph_0, n)$  -wom-моноид болып табылады;

(2) егер  $p$  оң (сол жақ) квазирационалды болса, онда  $\mathfrak{F}_{v(p)}$  алгебрасы  $2n$  белгіден тұратын  $(P, QR, n)$  -wom-monoid болады (  $(P, QL, n)$ -wom-monoid);

(3) егер  $p$  иррационалды болса, онда  $\mathfrak{F}_{v(p)}$  алгебрасы  $2n - 1$  белгіден тұратын  $(P, I, n)$ -wom-моноид болып табылады.

3.1.6 теореманы дәлелдеу.  $RC_{bin}(p) = n$  болғандықтан,  $p(M)$  шексіз дөңес кластардың шексіз санына бөлетін,  $M \models T$  және  $\emptyset$  -анықталатын  $E_1(x, y)$  ,  $E_2(x, y)$  , ..., ,  $E_{n-1}(x, y)$  эквиваленттік қатынастары болады, сондықтан әрбір  $2 \leq i \leq n - 1$  үшін  $E_i$ -классы шексіз  $E_{i-1}$ -ішкі класстарға бөлінеді.

$p(x)$  қандай да бір  $\varphi(x)$  формуласымен оқшауланған делік. 2.1.6 Тұжырымына сәйкес эквиваленттік ртипке арналған жалғыз бинарлы оқшаулау формулалары төмендегілер болып табылады:

$$\theta_0(x, y) := x = y, \quad \theta_1(x, y) := x < y \wedge E_1(x, y), \quad (3.22)$$

$$\theta_2(x, y) := x > y \wedge E_1(x, y), \quad (3.23)$$

$$\theta_{2i-1}(x, y) := x < y \wedge E_i(x, y) \wedge \neg E_{i-1}(x, y), \quad (3.24)$$

$$\theta_{2i}(x, y) := x > y \wedge E_i(x, y) \wedge \neg E_{i-1}(x, y), \quad 2 \leq i \leq n - 1, \quad (3.25)$$

$$\theta_{2n-1}(x, y) := x < y \wedge \neg E_{n-1}(x, y) \wedge \varphi(y), \quad (3.26)$$

$$\theta_{2n}(x, y) := x > y \wedge \neg E_{n-1}(x, y) \wedge \varphi(y). \quad (3.27)$$

Осылайша,  $\mathfrak{F}_{v(p)}$  алгебрасы  $2n + 1$  белгілерден тұрады және  $(P, \aleph_0, n)$  -wom-моноиды  $\mathfrak{A}_n$  үшін изоморфты болады.

Егер  $p$  оңға қарай квазирационал болса, онда көрсетілген формулалар арасында  $\theta_{2n}(x, y)$  формула үшін  $p$  оқшаулауын тоқтатады, ал қалған формулалар үшін  $p$  оқшауланған күйде қалады. Осылайша,  $\mathfrak{F}_{v(p)}$  - алгебрасы wom-monoid  $\mathfrak{A}_n^{QR}(P, QR, n)$  үшін изоморфты. Алайда,  $p$  солға қарай

квазирационалды болса, қалған формулалардың оқшаулануын сақтай отырып  $\theta_{2n-1}(x, y)$  формуласы  $p$  үшін оқшаулауын тоқтатады. Яғни,  $\mathfrak{P}_{v(p)}$  алгебрасы  $(P, QL, n)$  -wom-monoid  $\mathfrak{A}_n^{QL}$  үшін изоморфты болады. Соңында, егер  $p$  иррационал тип болса, онда  $\theta_{2n-1}(x, y)$  және  $\theta_{2n}(x, y)$  формулалардың екеуі де  $p$  типі үшін оқшауланбайды. Осылайша,  $\mathfrak{P}_{v(p)}$  алгебрасы  $(P, I, n)$ -wom-моноидқа  $\mathfrak{A}_n^I$  изоморфты.

3.1.6 теоремасында  $\omega$  әлсіз о-минималды теория үшін дерлік категориялық шарт маңызды екенін ескерсек: шынында да, 3.1.5-мысалға оралайық және келесі формулаларды қарастырайық:

$$R_1(x, y) := R(x, y),$$

$$R_n(x, y) := \exists t [R_{n-1}(x, t) \wedge R_1(t, y)], \quad (3.28)$$

$p$  типі үшін бинарлы оқшаулау формулалары келесідегіде:

$$\theta_0(x, y) := x = y, \quad \theta_1(x, y) := x < y \wedge R_1(x, y), \quad (3.29)$$

$$\theta_n(x, y) := x < y \wedge R_n(x, y) \wedge \neg R_{n-1}(x, y), n \geq 2, \quad (3.30)$$

$$\theta'_1(x, y) := x > y \wedge R_1(y, x), \quad (3.31)$$

$$\theta'_n(x, y) := x > y \wedge R_n(y, x) \wedge \neg R_{n-1}(y, x), n \geq 2. \quad (3.32)$$

$\mathfrak{P}_{v(p)}$  алгебрасы шексіз, сондықтан кез келген  $(P, \aleph_0, n)$  - wom-monoid үшін изоморфты емес.

**Салдар 3.1.7.**  $T$  дерлік  $\omega$  -категориялық әлсіз о-минималды теория болсын,  $p, q \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес болсын. Сонда және  $\mathfrak{P}_{v(q)}$  алгебралары  $\mathfrak{P}_{v(p)}$  изоморфты болады, егер  $RC_{bin}(p) = RC_{bin}(q)$  және  $q$  мен  $p$  екеуі бір уақытта квазирационалды немесе иррационал оқшауланған болса.

Сонымен, қорытынды 3.1.7-ге сәйкес алгебра изоморфизмінің  $\mathfrak{P}_{v(p)}$  типі екі сипаттамамен анықталады:  $p$  типінің дөңестік дәрежесінің мәні, сондай-ақ  $p$  типінің оқшауланған немесе квазирационалдық немесе иррационалдық типтер классына жататындығы.

### 3.2 Әлсіз ортогональды емес 1-типтер

Алғашында [8] енгізілген кейбір ұғымдарды еске түсірсек.  $Y \subset M^{n+1}$  —  $\emptyset$ -анықталатын,  $\pi: M^{n+1} \rightarrow M^n$  — соңғы координатаны алып тастайтын проекция, ал  $Z := \pi(Y)$  болсын. Әрбір  $\bar{a} \in Z$  үшін  $Y_{\bar{a}} := \{y: (\bar{a}, y) \in Y\}$ . Әрбір  $\bar{a} \in Z$  үшін  $Y_{\bar{a}}$  жиыны жоғарыдан шектелген, бірақ  $M$  де супремумы жоқ.  $\sim$  —  $M^n$  де  $\emptyset$  — анықталатын эквиваленттік қатынас болсын  $\sim$  келесідегідей анықталады: Егер  $\bar{a}, \bar{b} \in Z$   $\bar{a} \sim \bar{b}$  болса, онда барлық  $\bar{a}, \bar{b} \in M^n \setminus Z$  үшін, және  $\bar{a} \sim \bar{b} \Leftrightarrow \sup Y_{\bar{a}} = \sup Y_{\bar{b}}$  болады.

$\bar{Z} := Z/\sim$  болсын, және әрбір  $\bar{a} \in \bar{Z}$  кортежі үшін  $[\bar{a}] \sim$ -класс арқылы  $[\bar{a}] \sim$ -кортежін белгілейміз.  $M \cup \bar{Z}$  бойынша  $\emptyset$ -анықталатын сызықтық тәртіп бар, ол келесідегідей анықталған.  $\bar{a} \in \bar{Z}$  және  $c \in M$  болсын. Сонда барлық  $w \in Y_{\bar{a}}$  үшін  $w < c$  ғана орындалса  $[\bar{a}] < c$  ғана орындалады. Егер  $\bar{a} \succ \bar{b}$  болса, онда  $x \in M$  үшін  $[\bar{a}] < x < [\bar{b}]$  немесе  $[\bar{b}] < x < [\bar{a}]$  болады, сондықтан  $<$  реттелігі  $M \cup \bar{Z}$  бойынша сызықтық тәртіпті индукциялайды. Біз бұл жиынды  $\bar{M}$  бойынша  $\bar{Z}$  сұрыптау деп атаймыз (бұл жағдайда  $\emptyset$  анықталатын сұрыптау), мұнда  $\bar{M}$   $M$  – құрылымының дедекіндік толықтыруы болып табылады және  $\bar{Z}$  -ті  $\bar{M}$  ішіне тікелей түрде ендірілген ретінде қарастырамыз. Сол сияқты,  $\bar{M}$  супреманың орнына инфимумын қарастыру арқылы сұрыптауға болады.

Осылайша, анықталатын функцияларды  $M$  -нан оның Дедекіндік толықтыруына  $\bar{M}$ , дәлірек айтсақ, анықталатын жиындардың инфимум немесе супремум түрлерін қарастырамыз.

$A, D \subseteq M$ ,  $D$  - шексіз болсын,  $Z \subseteq \bar{M}$   $A$  – анықталатын сұрыптау және  $f: D \rightarrow Z$   $A$ - анықталатын функция болсын. Егер құрамында  $\{a\}$  болатын кез келгені  $a \in D$  үшін  $J \subseteq D$  шексіз интервал бар болса,  $f|_D$  – да локалды өспелі (локалды кемімелі, локалды тұрақты) болады, сондықтан  $f|_J$  бойынша қатаң түрде өседі (қатаң азаяды, тұрақты); сондай-ақ егер  $D$  – да локалды өссе немесе локалды кемісе  $f|_D$  – да локалды монотонды болады.

$f|_D \subseteq M$  да  $A$  -анықталатын функция және  $E|_D$  – бойынша  $A$  - анықталатын эквиваленттік қатынас болсын. Егер  $a < b$  және  $\neg E(a, b)$  шарттарымен кез келген  $a, b \in D$  үшін  $f(a) < f(b)$  ( $f(a) > f(b)$ ) алынса,  $f|_D/E$  – да қатаң түрде өседі (кемиді).

**Анықтама 3.2.2.** [60, 61]  $M$  әлсіз о-минималды құрылым,  $B, D \subseteq M$ ,  $A \subseteq \bar{M}$   $B$ -анықталатын сұрыптау және  $f: D \rightarrow A$  локалды түрде өсетін (кемімелі)  $D$  – да  $B$  - анықталатын функция болсын. Егер  $E_1(x, y), \dots, E_n(x, y)$  эквиваленттік қатынастары бар болса,  $f$  функциясының  $D$  жиынында  $n$  тереңдігі бар деп айтамыз, ол  $D$  шексіз дөңес кластардың шексіз санына бөлінеді, сондықтан кез келген  $2 \leq i \leq n$  үшін әрбір  $E_i$ -классы  $E_{i-1}$ -ішкі класстардың шексіз дөңес санына бөлінеді және келесі шарттар орындалады:

- $f$  әрбір  $E_1$ -класста қатаң өседі (азаяды).
- $f$  кез келген тақ  $k \leq n$  үшін  $D/E_k$  бойынша локалды түрде кемиді (өседі) (немесе  $f$  кез келген  $a \in D$  үшін әрбір  $E_{k+1}(a, M)/E_k$  бойынша қатаң түрде кемиді (өседі))

- $f$  кез келген жұп  $k \leq n$  үшін  $D/E_k$  бойынша локалды өседе (кемиді).
- $f|_D/E_n$  бойынша қатаң монотонды болып табылады.

Бұл жағдайда  $f$  функциясы  $n$  тереңдігімен локалды өседі (кемиді).

Қатаң өсетін (кемитін) функция  $0$  тереңдікте локалды өсетін (кемитін) функциясы болып табылады.

**Теорема 3.2.3.** [60]  $T$  әлсіз о-минималды теория болсын. Сонда анықталатын сұрыптаудағы кез келген анықталатын функцияның шекті тереңдігі болады.

Әлбетте, егер  $p, q \in S_1(A)$  алгебралық емес және  $p \not\prec^w q$  болса, онда  $(p, q)$  – секаторы болады және барлық  $(p, q)$  секаторлар жиыны сызықтық реттелген болады. Әрбір  $(p, q)$  секатормен  $\phi(x, y)$   $f^\phi$  функциясын қарастырамыз, мұндағы  $f^\phi(x) := \sup \phi(x, M)$ . Сондай-ақ, кез келген  $\phi(x, y)$   $(p, q)$ -секаторы үшін  $f^\phi$  функциясы  $p(M)$  – да константа болмайды.

Сондай-ақ егер  $b_1 < b_2$  шартымен кез келген  $b_1, b_2 \in q(M)$  үшін  $b_1 < f^\phi(a) < b_2$  болатындай  $a \in p(M)$  бар болса онда  $(p, q)$ -секаторы  $\phi(x, y)$  үшін  $\text{Range } f_{p(M)}^\phi$  жиыны кез келген  $q(M^{eq})$  бойынша барлық жерде тығыз болады.

**Мысал 3.2.4.**  $M = \langle M; <, P_1^1, P_2^1, E_1^2, E_2^2, R^2 \rangle$  сызықты реттелген құрылым болсын, сондай-ақ  $P_1(M) < P_2(M)$  болғанда,  $M$   $P_1$  және  $P_2$  унарлы предикаттардың интерпретацияларының ажыратылған бірлестігі.  $P_1$  және  $P_2$  интерпретацияларының әрқайсысын  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  лексикографиялық реттілікпен анықтаймыз.  $E_i$  қатынасы әрбір  $i \leq 2$  үшін  $P_i(M)$  бойынша эквиваленттік қатынас болып табылады, яғни кез келген  $(a_1, a_2), (c_1, c_2) \in P_i(M)$  үшін  $E_i((a_1, a_2), (c_1, c_2)) \Leftrightarrow a_1 = c_1$ .  $R$  қатынасы кез келген  $(a_1, a_2) \in P_1(M)$   $(b_1, b_2) \in P_2(M)$  үшін төмендегідей анықталады:

$$R((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \Leftrightarrow b_1 < a_1 + \sqrt{2}. \quad (3.33)$$

$M$  әлсіз о-минималды құрылым екені анық.  $p := \{P_1(x)\}$ ,  $q := \{P_2(x)\}$  болсын. Әрине,  $p$  және  $q$  толық типтерді  $\emptyset$  бойынша анықтайды,  $p \not\prec^w q$ ,  $RC(p) = RC(q) = 2$  және  $R(x, y)$   $(p, q)$ -секаторлары болады.  $f^R$  функциясы  $p(M)$  бойынша локалды тұрақты, сонымен қатар  $\text{Range } f_{p(M)}^R - p(M)$  бойынша барлық жерде тығыз болмайды. Келесі формуланы қарастырсақ:

$$S(b_1, y) := b_1 \leq y \wedge \exists x [\neg R(x, b_1) \wedge \forall t (t > x \wedge R(t, b_1) \rightarrow R(t, y))]. \quad (3.34)$$

$S(x, y)$   $q$ -ті сақтайтын оң дөңес формула, ал  $S(x, y)$  эквивалент тудырмайтынын көру оңай. Демек,  $Th(M)$  дерлік  $\omega$ -категориялық емес.

**Тұжырым 3.2.5.**  $T$  дерлік  $\omega$ -категориялық әлсіз о-минималды теория,  $M \models T$   $p, q \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес болсын,  $p \not\prec^w q$ ,  $RC_{bin}(p) = RC_{bin}(q)$ .  $\text{Range}_R f_{p(M)}^R$  барлық жерде  $q(M^{eq})$  тығыз болатындай  $(p, q)$ -секаторы  $R(x, y)$  бар деп есептейік. Сонда  $f^R p(M)$  локалды монотонды болады.

3.2.5 Тұжырымын дәлелдеу. 2.2.4 Тұжырымы бойынша  $p(M)$  – да  $f^R$  локалды монотонды немесе локалды тұрақты болып табылады. Керісінше делік:  $f^R p(M)$  – да локалды тұрақты болып табылады.

1.1.5 теоремасы бойынша кейбір  $n < \omega$  үшін  $RC_{bin}(p) = n$ .  $p$  типі алгебралық емес болғандықтан, онда  $n \geq 1$ . Сонда шексіз дөңес класстардың шексіз санына бөлетін  $\emptyset$  - анықталатын  $E_1(x, y), \dots, E_{n-1}(x, y)$  эквиваленттік қатынастары болады, кейбір (кез келген) сондықтан  $E_1(x, y), \dots, E_{n-1}(x, y)$  болады үшін  $a \in p(M)$ .

$f^R p(M)$  бойынша локалды тұрақты болғандықтан,  $f^R$  әрбір  $E_k$ -класста

тұрақты болатындай  $1 \leq k \leq n - 1$  болады,  $f^R$  әрбір  $E_{k+1}$  - класста тұрақты емес класс болады және  $k$  - осындай қасиетпен максималды (мұнда  $E_n$  қатынасы  $p(M)$  бойынша универсал эквиваленттік қатынасты білдіреді). Әрі қарай,  $f^R$  функциясының әрбір  $E_{k+1}(a, M)/E_k$  бойынша әрекетін қарастырамыз, мұндағы  $a \in p(M)$ . 3.2.3 теоремасы бойынша  $f^R$  әрбір  $E_{k+1}(a, M)/E_k$  бойында қатаң монотонды болуы керек, әйтпесе  $\emptyset$  анықталатын  $\bar{E}(x, y)$  эквиваленттік қатынас пайда болады.

$$E_k(a, M) \subset \bar{E}(a, M) \subset E_{k+1}(a, M), \quad (3.35)$$

$E_{k+1}$  қатынасы  $p(M)$  бойынша барлық  $\emptyset$ -анықталатын эквиваленттік қатынастардың ішінде  $E_k(x, y)$  қатынасының тікелей жалғасы екендігіне қайшы. Дәлелдеуге болады,  $f^R$  әрбір  $E_{i+1}(a, M)/E_i$  үшін қатаң монотонды, мұнда  $k \leq i \leq n - 2$  және  $f$   $p(M)/E_{n-1}$  бойынша қатаң монотонды.

Келесі формулаларды қарастырсақ:

$$E'_{k+1}(x, y) := \exists t_1 \exists t_2 [E_{k+1}(t_1, t_2) \wedge f(t_1) < x < f(t_2) \wedge f^R(t_1) < y < f^R(t_2)] \quad (3.36)$$

$$E'_{n-1}(x, y) := \exists t_1 \exists t_2 [E_{n-1}(t_1, t_2) \wedge f(t_1) < x < f(t_2) \wedge f^R(t_1) < y < f^R(t_2)] \quad (3.37)$$

Сол сияқты,  $q(M)$  шексіз дөңес класстардың шексіз санына бөлетін  $E'_{k+1}(x, y), \dots, E'_{n-1}(x, y)$  эквиваленттік қатынастар

$$E'_{k+1}(b, M) \subset \dots \subset E'_{n-1}(b, M), \quad (3.38)$$

мұнда  $RC_{bin}(q) \geq n - k$ . Әрі қарай,  $q(M)$  шексіз дөңес кластардың шексіз санына бөлетін  $\emptyset$ -анықталатын эквиваленттік қатынас  $E^q(x, y)$  бар болса,  $E^q(b, M) \subset E'_{k+1}(b, M)$  болатын келесі формуланы қарастырамыз:

$$\hat{E}(x, y) := \exists t_1 \exists t_2 [E^q(t_1, t_2) \wedge t_1 < f^R(x) < t_2 \wedge t_1 < f^R(y) < t_2]. \quad (3.39)$$

Барлық жерде  $Range f^R_{p(M)}$  тығыздығына байланысты  $b_1 < f^R(a) < b_2$  болатындай  $E^q(b_1, b_2)$  және  $b_1 < b_2$  шарттары бар кез келген  $b_1, b_2 \in q(M)$  үшін  $a \in p(M)$  болады.

Демек,  $\hat{E}(a, M) \neq \emptyset$ .  $E^q(b_2, b_3)$  және  $b_2 < b_3$  болатындай ерікті  $b_3 \in q(M)$  аламыз. Сонда  $Range_R f^R_{p(M)}$  тығыздығын қайта қолданып,  $b_2 < f^R(a') < b_3$  болатындай  $a' \in p(M)$  табамыз. Осыдан  $\hat{E}(a, M) \setminus \{a\} \neq \emptyset$  аламыз. Осылайша,  $\hat{E}(x, y)$   $p(M)$  бойынша  $\emptyset$ -анықталатын тривиалды емес эквиваленттік қатынас болып табылады. Мұны анықтау оңай

$$E_k(a, M) \subset \hat{E}(a, M) \subset E_{k+1}(a, M), \quad (3.40)$$

$p(M)$  бойынша барлық  $\emptyset$ -анықталатын эквиваленттік қатынастардың ішінде  $E_{k+1} E_k(x, y)$  тікелей тізбегі екендігіне қайшы.  $q(M)$  шексіз дөңес кластардың шексіз санына бөлетін  $E^q(x, y)$  эквиваленттік қатынасы жоқ екенін дәл осылай дәлелдеуге болады, және кез келген  $k + 1 \leq i \leq n - 2$  немесе  $E'_{n-1}(b, M) \subset E^q(b, M)$  үшін

$$E'_i(b, M) \subset E^q(b, M) \subset E'_{i+1}(b, M) \quad (3.41)$$

орындалады. Осылайша,  $RC_{bin}(q) = n - k$ , бұл тұжырымның шарттарына қайшы келеді.

**Тұжырым 3.2.6.**  $T$  дерлік  $\omega$ -категориялық әлсіз о-минималды теория,  $M \models T$ ,  $p, q \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес болсын,  $p \not\leq^w q$ ,  $RC_{bin}(p) = RC_{bin}(q)$ .

$Range_R f_{p(M)}^R$  барлық жерде  $q(M^{eq})$  бойынша тығыз емес болатындай  $(p, q)$ -секатор  $R(x, y)$  бар деп есептейік. Содан кейін келесі шарттар орын алады:

(1)  $f^R(a) = \inf E^q(b, M)$  болатындай кез келген  $a \in p(M)$  үшін  $b \in q(M)$  табылады немесе  $f^R(a) = \sup E^q(b, M)$  болатындай кез келген  $a \in p(M)$  үшін  $b \in q(M)$  табылатындай  $q(M)$  бойынша  $\emptyset$ -анықталатын  $E^q(x, y)$  эквиваленттік қатынас болады.

(2)  $f^R p(M)$  бойынша локалды тұрақты.

Тұжырым 3.2.6 дәлелдеу. 1.1.5 теоремасы бойынша кейбір  $n < \omega$  үшін  $RC_{bin}(q) = n$  орындалады.  $q$  типі алгебралық емес болғандықтан,  $n \geq 1$  болады. Кейбір  $b \in q(M)$  үшін,  $\emptyset$ -анықталатын,  $q(M)$  – ны шексіз дөңес кластардың шексіз санына бөлетін эквиваленттік қатынастар  $E_1^q(x, y), \dots, E_{n-1}^q(x, y)$  бар, яғни

$$E_1^q(b, M) \subset \dots \subset E_{n-1}^q(b, M). \quad (3.42)$$

Сол сияқты, кейбір (кез келген)  $a \in p(M)$  үшін  $\emptyset$ -анықталатын шексіз дөңес кластарды  $p(M)$  шексіз санға бөлетін  $E_1^p(x, y), \dots, E_{n-1}^p(x, y)$  эквиваленттік қатынастар бар, яғни

$$E_1^p(a, M) \subset \dots \subset E_{n-1}^p(a, M). \quad (3.43)$$

Кез келген  $b \in q(M)$   $f^R(a) \neq \sup E^q(b, M)$  және  $f^R(a) \neq \inf E^q(b, M)$  үшін  $\emptyset$ -анықталатын  $E^q(x, y)$  эквиваленттік қатынаста  $q(M)$  бойынша шексіз дөңес кластарымен  $a \in p(M)$  анықталады.  $Range_R f_{p(M)}^R$   $q(M^{eq})$  бойынша барлық жерде тығыз болмағандықтан кез келген  $a \in p(M)$   $f^R(a) < b_1$  немесе  $b_2 < f^R(a)$   $b_1 < b_2$  орындалатын  $b_1, b_2 \in q(M)$  болады.

Кез келген  $\emptyset$ -анықталатын  $q(M)$  да шексіз дөңес класстармен  $E^q(x, y)$  эквиваленттік қатынасы үшін  $\neg E^q(b_1, b_2)$  орындалса келесі формуланы қарастырамыз:

$$S(b_1, y) := b_1 \leq y \wedge \exists x [\neg R(x, b_1) \wedge \forall t (t > x \wedge R(t, b_1) \rightarrow R(t, y))]. \quad (3.44)$$

$S(x, y)$  оңға дөңес  $q$  –сақтайтын формула екенін байқау қиын емес.  $T$  дерлік  $\omega$  - категориялық болғандықтан, 2.1.5 леммасы арқылы  $S(x, y)$  формуласы эквиваленттілікті тудыратын формула болып табылады.

$$E_S^q(x, y) := S(x, y) \vee S(y, x) \quad (3.45)$$

$q(M)$  шексіз дөңес кластардың шексіз санына бөлетін эквиваленттік қатынас. Сонда,  $RC_{bin}(q) \geq n + 1$  шартымен  $E_{n-1}^q(b_1, M) \subset E_S^q(b_1, M)$  аламыз. Соңғысы тұжырым шарттарына қайшы келеді. Демек  $E_k^q(b_1, b_2)$  шартымен, мұнда  $k$  максималды болатындай  $1 \leq k \leq n - 1$  бар. Егер кез келген  $a \in p(M)$   $b_1 < f^R(a)$  болса,

$$\sup E_k^q(b_1, M) < f^R(a) < \sup E_{k+1}^q(b_1, M) \quad (3.46)$$

орындалады, (мұнда  $E_n^q$  – қатынасы деп  $q(M)$  бойынша әмбебап эквиваленттілік қатынасы айтылған), сонда  $S(x, y)$  формуланы қарастыра отырып, келесі формуланы аламыз

$$E_k^q(b_1, M) \subset E_S^q(b_1, M) \subset E_{k+1}^q(b_1, M), \quad (3.47)$$

мұнда  $RC_{bin}(q) \geq n + 1$ .

$$\sup E_{k-1}^q(b_1, M) < f^R(a) < \sup E_k^q(b_1, M) \quad (3.48)$$

орындалатындай  $a \in p(M)$  бар деп есептейік (мұнда  $E_0^q(x, y) := x = y$ ), сонда  $S(x, y)$  формуласын ескере отырып, келесі өрнекті аламыз

$$E_{k-1}^q(b_1, M) \subset E_S^q(b_1, M) \subset E_k^q(b_1, M), \quad (3.49)$$

мұнда  $RC_{bin}(q) \geq n + 1$ .

Кейбір  $a \in p(M)$ ,  $b \in q(M)$  және  $1 \leq k \leq n - 1$  үшін егер  $f^R(a) = \sup E_k^q(b, M)$  болса, келесі формуланы қарастырамыз:

$$R'(a, y) := \exists t [R(a, t) \wedge \forall u (E_k^q(t, u) \rightarrow R(a, u)) \wedge \forall z [t < z \wedge \neg E_k^q(t, z) \rightarrow \neg R(a, z)] \wedge \neg E_k^q(y, t) \wedge y < t]. \quad (3.50)$$

Сонда  $f^{R'}(a) = \inf E_k^q(b, M)$  болатыны анық.

$f^R$   $p(M)$  да локалды тұрақты болса. Керісінше делік:  $f^R$   $p(M)$ -де локалды тұрақты емес. Сонда  $f^R$   $p(M)$  да локалды монотонды болып табылады, демек,  $f^R$  кейбір  $1 \leq k \leq n - 1$  үшін әрбір  $E_k^p$ -класста қатаң монотонды және

бұл қасиетпен  $k$ - максималды. Сонда келесі формуланы қарастырамыз:

$$E^q(x, y) := [x \neq y \wedge \neg E_k^q(x, y) \rightarrow \exists t_1 \exists t_2 \exists t_3 (t_1 < t_2 < t_3 \wedge E_k^p(t_1, t_3) \wedge (x < y \rightarrow f(t_1) < x < f(t_2) < y < f(t_3)) \wedge (x > y \rightarrow f(t_1) < y < f(t_2) < x < f(t_3)))] \quad (3.51)$$

$E^q(x, y)$   $q(M)$  бойынша эквиваленттік қатынаста екені анық, оның үстіне кейбір  $b \in q(M)$  үшін  $E_k^q(b, M) \subset E^q(b, M) \subset E_{k+1}^q(b, M)$ , мұнда  $RC_{bin}(q) \geq n + 1$ .

### 3.3 1-типті топтарға арналған формулалар алгебрасы

**Мысал 3.3.1.** [8]  $M$  –  $P_1$  және  $P_2$  унарлы предикаттарының интерпретацияларының ажыратылған бірлестігі, сонымен қатар  $P_1(M) < P_2(M)$  орындалатындай  $M = \langle M; <, P_1^1, P_2^1, f^1 \rangle$  сызықты реттелген құрылым болсын.  $P_2$  интерпретациясын әдеттегідей реттелген  $\mathbb{Q}$  рационал сандар жиынымен және лексикографиялық реттелген  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  арқылы  $P_1$  сәйкестендіреміз.  $f$  символы  $Dom f = P_1(M)$  және  $Range f = P_2(M)$  ішінара унарлы функциясы арқылы түсіндіріледі және барлық  $(n, m) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  үшін  $f((n, m)) = n$  теңдігімен анықталады.

$M$  саналымды категориялық әлсіз о-минималды құрылым екені белгілі.  $p := \{P_1(x)\}$ ,  $q := \{P_2(x)\}$  болсын. Әлбетте,  $p, q \in S_1(\emptyset)$ ,  $RC(p) = 2$ ,  $RC(q) = 1$  екені белгілі. Егер белгі функцияларына жүгінсек, онда:  $\rho_{v(q)} = \{0, 1, 2\}$ ,  $\rho_{v(p)} = \{0, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $\rho_{v(p, q)} = \{7, 8, 9\}$ ,  $\rho_{v(q, p)} = \{10, 11, 12\}$  шығады, мұндағы

$$\theta_0(x, y) := x = y,$$

$$\theta_{q,1,q}(x, y) := x < y \wedge P_2(y), \quad (3.52)$$

$$\theta_{q,2,q}(x, y) := x > y \wedge P_2(y), \quad (3.53)$$

$$\theta_{p,3,p}(x, y) := x < y \wedge E(x, y) \wedge P_1(y), \quad (3.54)$$

$$\theta_{p,4,p}(x, y) := x > y \wedge E(x, y) \wedge P_1(y), \quad (3.55)$$

$$\theta_{p,5,p}(x, y) := x < y \wedge \neg E(x, y) \wedge P_1(y), \quad (3.56)$$

$$\theta_{p,6,p}(x, y) := x > y \wedge \neg E(x, y) \wedge P_1(y), \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \theta_{p,7,q}(x, y) &:= \phi_0(x, y), & \theta_{p,8,q}(x, y) &:= \phi_1(x, y), & \theta_{p,9,q}(x, y) &:= \phi_2(x, y), \\ \theta_{q,10,p}(x, y) &:= \phi_0^{-1}(x, y), \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\theta_{q,11,p}(x,y) := \phi_1^{-1}(x,y),$$

$$\theta_{q,12,p}(x,y) := \phi_2^{-1}(x,y).$$

$\mathfrak{P}_{v(\{p,q\})}$  алгебрасы  $\mathfrak{P}_{v(p)}$  және  $\mathfrak{P}_{v(q)}$  кеңейту арқылы келесі әрекеттермен алынады:

- а)  $n \cdot 0 = 0 \cdot n = \{n\}$ ,  $n \in \{7,8,9,10,11,12\}$ ,
- ә)  $7 \cdot 1 = \{8\}$ ,  $7 \cdot 2 = \{9\}$ ,  $7 \cdot 10 = \{0,3,4\}$ ,  $7 \cdot 11 = \{6\}$ ,  $7 \cdot 12 = \{5\}$ ,
- в)  $8 \cdot 1 = \{8\}$ ,  $8 \cdot 2 = \{7,8,9\}$ ,  $8 \cdot 10 = \{5\}$ ,  $8 \cdot 11 = \{0,3,4,5,6\}$ ,  $8 \cdot 12 = \{5\}$ ,
- г)  $9 \cdot 1 = \{7,8,9\}$ ,  $9 \cdot 2 = \{9\}$ ,  $9 \cdot 10 = \{6\}$ ,  $9 \cdot 11 = \{6\}$ ,  $9 \cdot 12 = \{0,3,4,5,6\}$ ,
- д)  $10 \cdot 3 = \{10\}$ ,  $10 \cdot 4 = \{10\}$ ,  $10 \cdot 5 = \{12\}$ ,  $10 \cdot 6 = \{11\}$ ,  $10 \cdot 7 = \{0\}$ ,  
 $10 \cdot 8 = \{1\}$ ,  $10 \cdot 9 = \{2\}$ ,
- д)  $11 \cdot 3 = \{11\}$ ,  $11 \cdot 4 = \{11\}$ ,  $11 \cdot 5 = \{10,11,12\}$ ,  $11 \cdot 6 = \{11\}$ ,  $11 \cdot 7 = \{2\}$ ,  
 $11 \cdot 8 = \{0,1,2\}$ ,  $11 \cdot 9 = \{2\}$ ,
- ж)  $12 \cdot 3 = \{12\}$ ,  $12 \cdot 4 = \{12\}$ ,  $12 \cdot 5 = \{12\}$ ,  $12 \cdot 6 = \{10,11,12\}$ ,  $12 \cdot 7 = \{1\}$ ,  
 $12 \cdot 8 = \{1\}$ ,  $12 \cdot 9 = \{0,1,2\}$ .

$\mathfrak{P}_{v(\{p,q\})}$  алгебрасы - белгілер жиынының бос емес ішкі жиындарының жиынында ішінара көбейтумен коммутативті емес моноид екенін көру оңай.

**Анықтама 3.3.2.** [22] Егер,  $\mathfrak{P}_{v(p)}$  және  $\mathfrak{P}_{v(q)}$  алгебралары изоморфты екенін көрсететін  $\pi: \rho_{v(p)} \rightarrow \rho_{v(q)}$  өзара кескіндемесі бар болса (яғни олардың анықтаушы кестелері  $\pi$ -ге дейін сәйкес келгенде)  $\mathfrak{P}_{v(\{p,q\})}$  алгебрасын жалпылама коммутативті деп айтамыз, мұнда кез келген  $l \in \rho_{v(p,q)}$ ,  $m \in \rho_{v(q,p)}$  үшін  $(\pi(l \cdot m) = m \cdot l$  орындалады.

Әлбетте, 3.3.1-мысалдағы  $\mathfrak{P}_{v(\{p,q\})}$  алгебрасы жалпылама коммутативті емес, өйткені  $\mathfrak{P}_{v(p)}$  және  $\mathfrak{P}_{v(q)}$  арасында изоморфизм жоқ, мысалы,  $10 \cdot 7 = \{0\}$ ,  $7 \cdot 10 = \{0,3,4\}$ , яғни  $10 \cdot 7 \subsetneq 7 \cdot 10$ .

**Теорема 3.3.3.**  $T$  дерлік  $\omega$ -категориялық әлсіз о-минималды теория болсын,  $p, q \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес типтер болсын,  $p \not\leq^w q$ . Сонда келесі шарттар эквивалентті болады:

- (1) алгебра  $\mathfrak{P}_{v(\{p,q\})}$  — жалпылама коммутативті;
- (2)  $RC_{bin}(p) = RC_{bin}(q)$ .

Теорема 3.3.3 дәлелдеу. Жалпы,  $p$  типін оқшауланған деп есептейік. Сонда 3.1.3 Тұжырымы бойынша  $q$  типі де оқшауланады.

(1)  $\Rightarrow$  (2). Егер  $RC_{bin}(p) \neq RC_{bin}(q)$  болса, сонда 3.1.6 теоремасы бойынша  $\mathfrak{P}_{v(p)}$  және  $\mathfrak{P}_{v(q)}$  алгебралары тең емес белгілер жиындарын алады. Сондықтан бұл алгебралар изоморфты емес, және  $\mathfrak{P}_{v(\{p,q\})}$  алгебрасы жалпыланған коммутативті болмайды.

(2)  $\Rightarrow$  (1). Кейбір  $n < \omega$  үшін  $RC_{bin}(p) = RC_{bin}(q) = n$  болсын. Демек,  $p(M)$  және  $q(M)$  сәйкесінше шексіз дөңес кластардың шексіз санына бөліне,  $M \models T$  және  $\emptyset$ -анықталатын  $E_1^p(x, y), \dots, E_{n-1}^p(x, y)$  және  $E_1^q(x, y), \dots, E_{n-1}^q(x, y)$  эквиваленттік қатынастар болады, ал кейбір (кез келген)  $a \in p(M)$ ,  $b \in q(M)$

үшін  $E_1^p(a, M) \subset \dots \subset E_{n-1}^p(a, M)$  және

$$E_1^q(b, M) \subset \dots \subset E_{n-1}^q(b, M). \quad (3.59)$$

Сонда 3.1.6 теоремасы бойынша  $\rho_{v(p)} = \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$ ,  $\rho_{v(q)} = \{0, 1', 2', \dots, (2n)'\}$ .

Жағдай 1. *Range*  $f_{p(M)}^R$   $q(M^{eq})$  ішінде толығымен тығыз болатындай  $(p, q)$ -секатор  $R(x, y)$  бар.

Сонда, 3.2.6 Тұжырымы бойынша  $f^R$  функциясы  $p(M)$  -да жергілікті монотонды болатындай  $R(x, y)$   $(p, q)$ -секаторы болады. Сондықтан,  $f^R$  әрбір  $E_1^p$  класста қатаң монотонды. Келесі белгі формулаларын қарастырсақ:

$$\theta_0(x, y) := x = y, \quad (3.60)$$

$$\theta_{p,1,p}(x, y) := x < y \wedge E_1^p(x, y), \quad \theta_{q,1',q}(x, y) := x < y \wedge E_1^q(x, y), \quad (3.61)$$

$$\theta_{p,2,p}(x, y) := x > y \wedge E_1^p(x, y), \quad \theta_{q,2',q}(x, y) := x > y \wedge E_1^q(x, y), \quad (3.62)$$

$$\theta_{p,3,p}(x, y) := x < y \wedge \neg E_1^p(x, y) \wedge E_2^p(x, y), \quad (3.63)$$

$$\theta_{q,3',q}(x, y) := x < y \wedge \neg E_1^q(x, y) \wedge E_2^q(x, y), \quad (3.64)$$

$$\theta_{p,4,p}(x, y) := x > y \wedge \neg E_1^p(x, y) \wedge E_2^p(x, y), \quad (3.65)$$

$$\theta_{q,4',q}(x, y) := x > y \wedge \neg E_1^q(x, y) \wedge E_2^q(x, y), \quad (3.66)$$

... ..

$$\theta_{p,2n-3,p}(x, y) := x < y \wedge \neg E_{n-2}^p(x, y) \wedge E_{n-1}^p(x, y), \quad (3.67)$$

$$\theta_{q,(2n-3)',q}(x, y) := x < y \wedge \neg E_{n-2}^q(x, y) \wedge E_{n-1}^q(x, y), \quad (3.68)$$

$$\theta_{p,2n-2,p}(x, y) := x > y \wedge \neg E_{n-2}^p(x, y) \wedge E_{n-1}^p(x, y), \quad (3.69)$$

$$\theta_{q,(2n-2)',q}(x, y) := x > y \wedge \neg E_{n-2}^q(x, y) \wedge E_{n-1}^q(x, y), \quad (3.70)$$

$$\theta_{p,2n-1,p}(x, y) := x < y \wedge \neg E_{n-1}^p(x, y), \quad (3.71)$$

$$\theta_{q,(2n-1)',q}(x, y) := x < y \wedge \neg E_{n-1}^q(x, y), \quad (3.72)$$

$$\theta_{p,2n,p}(x, y) := x > y \wedge \neg E_{n-1}^p(x, y), \quad (3.73)$$

$$\theta_{q,(2n)',q}(x,y) := x > y \wedge \neg E_{n-1}^q(x,y), \quad (3.74)$$

$$\theta_{p,2n+1,q}(x,y) := f^R(x) = y,$$

$$\theta_{q,4n+2,p}(x,y) := x = f^R(y), \quad (3.75)$$

$$\theta_{p,2n+2,q}(x,y) := f^R(x) < y \wedge E_1^q(f^R(x),y), \quad (3.76)$$

$$\theta_{q,4n+3,p}(x,y) := x > f^R(y) \wedge E_1^q(x,f^R(y)), \quad (3.77)$$

$$\theta_{p,2n+3,q}(x,y) := f^R(x) > y \wedge E_1^q(f^R(x),y), \quad (3.78)$$

$$\theta_{q,4n+4,p}(x,y) := x < f^R(y) \wedge E_1^q(x,f^R(y)), \quad (3.79)$$

$$\theta_{p,2n+4,q}(x,y) := f^R(x) < y \wedge \neg E_1^q(f^R(x),y) \wedge E_2^q(f^R(x),y), \quad (3.80)$$

$$\theta_{q,4n+5,p}(x,y) := x > f^R(y) \wedge \neg E_1^q(x,f^R(y)) \wedge E_2^q(x,f^R(y)), \quad (3.81)$$

...    ...    ...

$$\theta_{p,4n+1,q}(x,y) := f^R(x) > y \wedge \neg E_{n-1}^q(f^R(x),y), \quad (3.82)$$

$$\theta_{q,6n+2,p}(x,y) := x < f^R(y) \wedge \neg E_{n-1}^q(x,f^R(y)). \quad (3.83)$$

Кейбір (кез келген)  $a \in p(M)$  үшін  $dcl(\{a\}) \cap q(M) = \emptyset$  болған жағдайда,

$$\theta_{p,2n+1,q}(x,y) := f^R(x) = y \quad (3.84)$$

$$\theta_{q,4n+2,p}(x,y) := x = f^R(y) \quad (3.85)$$

таңбалау формулалары болмайды.

$l \in \{2n+1, \dots, 4n+1\}$  және  $m \in \{4n+2, \dots, 6n+2\}$  болатындай  $l, m$  кез келген белгілері үшін  $l \cdot m = m \cdot l$   $\mathfrak{P}_{v(p)}$  және  $\mathfrak{P}_{v(q)}$  алгебралары арасындағы изоморфизмге дейін орындалады.

Қосымша 1.  $\theta_{p,l,q}(x,y) \equiv f^R(x) = y \wedge P_1(x) \wedge P_2(y)$ .

Егер  $\theta_{q,m,p}(x,y) \equiv x = f^R(y) \wedge P_2(x) \wedge P_1(y)$ , онда  $l \cdot m = \{0\} = m \cdot l$  болатыны анық.

$\theta_{q,m_1,p}(x,y) \equiv x > f^R(y) \wedge E_1^q(x,f^R(y))$  және  $\theta_{q,m_2,p}(x,y) \equiv x < f^R(y) \wedge E_1^q(x,f^R(y))$  болсын. Егер  $f^R$  функциясы әрбір  $E_1^p$ -класста қатаң түрде

өсетін болса, онда

$$\theta_{p,k_1,p}(x,y) \equiv x > y \wedge E_1^p(x,y) \quad \text{и} \quad \theta_{p,k_2,p}(x,y) \equiv x < y \wedge E_1^p(x,y) \quad (3.86)$$

орындалатындай  $l \cdot m_1 = \{k_1\}$  және  $l \cdot m_2 = \{k_2\}$  аламыз.

Егер  $f^R$  функциясы әрбір  $E_1^p$ -класс та қатаң түрде кемитін болса, бізде  $l \cdot m_1 = \{k_2\}$  және  $l \cdot m_2 = \{k_1\}$  болады. Осы екі жағдайда да  $m_1 \cdot l = \{k_1\}$  және  $m_2 \cdot l = \{k_2\}$ , мұнда

$$\theta_{q,k_1,p}(x,y) \equiv x > y \wedge E_1^q(x,y) \quad \text{и} \quad \theta_{q,k_2,p}(x,y) \equiv x < y \wedge E_1^q(x,y). \quad (3.88)$$

$\theta_{q,m,p}(x,y) \equiv x > f^R(y) \wedge \neg E_i^q(x, f^R(y)) \wedge E_{i+1}^q(x, f^R(y))$  болсын. Егер  $f^R$  функциясы әрбір  $E_{i+1}^p(a, M)/E_i^p$  - да қатаң өссе ( $a \in p(M)$ ) онда  $l \cdot m = \{k\}$ , мұнда

$$\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_i^p(x,y) \wedge E_{i+1}^p(x,y). \quad (3.89)$$

Егер  $f^R$  функциясы  $E_{i+1}^p(a, M)/E_i^p$  - да қатаң кемімелі функция болса, онда  $l \cdot m = \{k\}$ , мұндағы

$$\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_i^p(x,y) \wedge E_{i+1}^p(x,y). \quad (3.90)$$

Осы екі жағдайда да  $m \cdot l = \{k'\}$ , мұнда

$$\theta_{q,k',p}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_i^q(x,y) \wedge E_{i+1}^q(x,y). \quad (3.91)$$

$\theta_{q,m,p}(x,y) \equiv x > f^R(y) \wedge \neg E_{n-1}^q(x, f^R(y))$  болсын. Егер  $f^R$   $p(M)/E_{n-1}^p$  -де қатаң өсетін функция болса онда  $l \cdot m = \{k\}$ , мұнда

$$\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_{n-1}^p(x,y). \quad (3.92)$$

Егер  $f^R$  функциясы  $p(M)/E_{n-1}^p$  - де қатаң кемімелі функция болса онда  $l \cdot m = \{k\}$ , мұнда

$$\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_{n-1}^p(x,y). \quad (3.93)$$

Осы екі жағдайда да,

$$\theta_{q,k',p}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_{n-1}^q(x,y) \quad (3.94)$$

орындалатындай  $m \cdot l = \{k'\}$  аламыз.

Қосымша 2.

$$\theta_{p,l,q}(x,y) \equiv f^R(x) < y \wedge E_1^q(f^R(x),y). \quad (3.95)$$

$\theta_{q,m,p}(x,y) \equiv x = f^R(y) \wedge P_2(x) \wedge P_1(y)$  болған кезде Қосымша 1 дегідей қарастырылады.

$\theta_{q,m,p}(x,y) \equiv x > f^R(y) \wedge E_1^q(x, f^R(y))$  болсын. Сонда  $l \cdot m = \{0, k_1, k_2\}$ , мұнда

$$\theta_{p,k_1,p}(x,y) \equiv x < y \wedge E_1^p(x,y), \quad \theta_{p,k_2,p}(x,y) \equiv x > y \wedge E_1^p(x,y).$$

Сонымен қатар,  $m \cdot l = \{0, k'_1, k'_2\}$ , мұнда

$$\theta_{q,k'_1,q}(x,y) \equiv x < y \wedge E_1^q(x,y), \quad \theta_{q,k'_2,q}(x,y) \equiv x > y \wedge E_1^q(x,y). \quad (3.96)$$

$\theta_{q,m,p}(x,y) \equiv x > f^R(y) \wedge \neg E_i^q(x, f^R(y)) \wedge E_{i+1}^q(x, f^R(y))$  болсын. Егер  $f^R$  функциясы  $E_{i+1}^p(a,M)/E_i^p$  да қатаң өсетін функция болса ( $a \in p(M)$ ), онда  $l \cdot m = \{k\}$ , мұнда

$$\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_i^p(x,y) \wedge E_{i+1}^p(x,y). \quad (3.97)$$

Егер  $f^R$  функциясы  $E_{i+1}^p(a,M)/E_i^p$  бойынша қатаң кемімелі функция болса онда  $l \cdot m = \{k\}$ ,

$$\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_i^p(x,y) \wedge E_{i+1}^p(x,y). \quad (3.98)$$

Осы екі жағдайда да,  $m \cdot l = \{k'\}$ , яғни

$$\theta_{q,k',p}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_i^q(x,y) \wedge E_{i+1}^q(x,y). \quad (3.99)$$

$$\theta_{q,m,p}(x,y) \equiv x > f^R(y) \wedge \neg E_{n-1}^q(x, f^R(y))$$

болсын. Егер  $f^R$   $p(M)/E_{n-1}^p$ -де қатаң өсетін функция болса, онда  $l \cdot m = \{k\}$ ,

$$\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_{n-1}^p(x,y).$$

Егер  $f^R$   $p(M)/E_{n-1}^p$  -де қатаң кемімелі функция болса, онда  $l \cdot m = \{k\}$ , мұнда

$$\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_{n-1}^p(x,y). \quad (3.100)$$

Осы екі жағдайда да  $m \cdot l = \{k'\}$ , онда

$$\theta_{q,k',p}(x, y) \equiv x > y \wedge \neg E_{n-1}^q(x, y).$$

Қосымша 3.  $\theta_{p,l,q}(x, y) \equiv f^R(x) < y \wedge \neg E_i^q(f^R(x), y) \wedge E_{i+1}^q(f^R(x), y)$ .

Алдымен  $\theta_{q,m,p}(x, y)$  формуласы:  $x = f^R(y) \wedge P_2(x) \wedge P_1(y)$  немесе  $x > f^R(y) \wedge E_1^q(x, f^R(y))$  формулалардың біріне эквивалентті болсын делік. Онда егер  $f^R E_{i+1}^p(a, M)/E_i^p$  де қатаң өсетін функция болса, онда  $l \cdot m = \{k\}$ , қайда

$$\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x < y \wedge \neg E_i^p(x, y) \wedge E_{i+1}^p(x, y). \quad (3.101)$$

Егер  $f^R$  функциясы  $E_{i+1}^p(a, M)/E_i^p$  бойынша қатаң кемімелі функция болса, онда  $l \cdot m = \{k\}$ , мұнда

$$\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x > y \wedge \neg E_i^p(x, y) \wedge E_{i+1}^p(x, y). \quad (3.102)$$

Осы екі жағдайда да,

$$\theta_{q,k',p}(x, y) \equiv x < y \wedge \neg E_i^q(x, y) \wedge E_{i+1}^q(x, y) \quad (3.103)$$

орындалатындай  $m \cdot l = \{k'\}$  формуласын аламыз.

$\theta_{q,m,p}(x, y) \equiv x > f^R(y) \wedge \neg E_s^q(x, f^R(y)) \wedge E_{s+1}^q(x, f^R(y))$  болсын. Алдымен  $i = s$  деп алсақ. Сонда  $l \cdot m = \{0, 1, 2, \dots, 2i + 2\}$  және  $m \cdot l = \{0, 1', 2', \dots, (2i + 2)'\}$  десек болады.

$i + 1 \leq s$  делік. Егер  $f^R$  әрбір  $E_{s+1}^p(a, M)/E_s^p$  үшін қатаң өсетін функция болса, онда

$$\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x > y \wedge \neg E_s^p(x, y) \wedge E_{s+1}^p(x, y) \quad (3.104)$$

орындалатындай  $l \cdot m = \{k\}$  шығады.

Егер  $f^R$  әрбір  $E_{s+1}^p(a, M)/E_s^p$  үшін қатаң кемімелі функция болса, онда  $l \cdot m = \{k\}$ , мұндағы

$$\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x < y \wedge \neg E_s^p(x, y) \wedge E_{s+1}^p(x, y). \quad (3.105)$$

Осы екі жағдайда да бізде  $m \cdot l = \{k'\}$ , мұндағы

$$\theta_{q,k',p}(x, y) \equiv x > y \wedge \neg E_s^q(x, y) \wedge E_{s+1}^q(x, y). \quad (3.106)$$

$s + 1 \leq i$  болсын. Егер  $f^R$  әрбір  $E_{i+1}^p(a, M)/E_i^p$  бойынша қатаң өсетін функция болса, сонда  $l \cdot m = \{k\}$ , мұндағы

$$\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x < y \wedge \neg E_i^p(x, y) \wedge E_{i+1}^p(x, y).$$

Егер  $f^R$  әрбір  $E_{i+1}^p(a, M)/E_i^p$  бойынша қатаң кемімелі функция болса, онда  $l \cdot m = \{k\}$ , мұндағы

$$\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x > y \wedge \neg E_i^p(x, y) \wedge E_{i+1}^p(x, y).$$

Бұл екі жағдайда да  $m \cdot l = \{k'\}$  сәйкесінше

$$\theta_{q,k',p}(x, y) \equiv x < y \wedge \neg E_i^q(x, y) \wedge E_{i+1}^q(x, y).$$

$\theta_{q,m,p}(x, y) \equiv x < f^R(y) \wedge \neg E_{n-1}^q(x, f^R(y))$  болсын. Егер  $f^R$   $p(M)/E_{n-1}^p$ -де қатаң өсетін функция болса, онда  $l \cdot m = \{k\}$  болады, мұндағы

$$\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x > y \wedge \neg E_{n-1}^p(x, y).$$

Егер  $f^R$   $p(M)/E_{n-1}^p$ -де қатаң кемімелі функция болса, онда  $l \cdot m = \{k\}$ , мұнда

$$\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x < y \wedge \neg E_{n-1}^p(x, y).$$

Осы екі жағдайда да,

$$\theta_{q,k',p}(x, y) \equiv x < y \wedge \neg E_i^q(x, y) \wedge E_{i+1}^q(x, y)$$

болғанда,  $m \cdot l = \{k'\}$  орындалады.

Қосымша 4.  $\theta_{p,l,q}(x, y) \equiv f^R(x) < y \wedge \neg E_{n-1}^q(f^R(x), y).$

$\theta_{q,m,p}(x, y)$  формуласы келесі үш формуланың біріне эквивалентті делік :

$$x = f^R(y) \wedge P_1(y) \wedge P_2(x), \quad x > f^R(y) \wedge E_1^q(x, f^R(y))$$

$$x > f^R(y) \wedge \neg E_i^q(x, f^R(y)) \wedge E_{i+1}^q(x, f^R(y)).$$

Сонда егер  $f^R$   $p(M)/E_{n-1}^p$ -де қатаң өсетін функция болса, онда  $l \cdot m = \{k\}$ , мұндағы

$$\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x < y \wedge \neg E_{n-1}^p(x, y).$$

Егер  $f^R$   $p(M)/E_{n-1}^p$ , -де қатаң кемімелі функция болса онда  $l \cdot m = \{k\}$ , мұнда

$$\theta_{p,k,p}(x, y) \equiv x > y \wedge \neg E_{n-1}^p(x, y).$$

Бұл екі жағдайда да  $m \cdot l = \{k'\}$  теңдігі орындалады, мұнда

$$\theta_{q,k',p}(x, y) \equiv x < y \wedge \neg E_{n-1}^q(x, y).$$

$\theta_{q,m,p}(x, y) \equiv x > f^R(y) \wedge \neg E_{n-1}^q(x, f^R(y))$  болсын. Сонда  $l \cdot m = \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$  және  $m \cdot l = \{0, 1', 2', \dots, (2n)'\}$  екенін түсіну оңай.

Егер  $p$  типі квазирационалды (иррационал) болса, онда 3.1.3 Тұжырымы бойынша  $q$  типі де квазирационалды (иррационал) болып табылады.

Жартылай окшаулаудың симметриясыздығын белгілейтін формулалары бар теріс белгілерге сол немесе оң жақтағы квазирационалдылыққа байланысты, сондай-ақ  $4n + 1$  немесе  $6n + 2$  белгілерін, квазирационалды жағдай үшін  $(2n - 1, 2n)$ ,  $((2n - 1)', (2n)')$  жұп белгілердің өзгеруімен дәлелдеуді қайталаймыз.

Иррационалды жағдай үшін көрсетілген белгілермен формулаларсыз дәлелді қайталаймыз, өйткені мұнда жалпы  $E_{n-1}^p$ -класстарға немесе жалпы  $E_{n-1}^q$ -класстарға түсуді терістеу окшаулау формулалары арқылы шығарылмайды.

Жағдай 2. Кез келген  $R(x, y)$   $(p, q)$ -секаторы үшін  $Range f_{p(M)}^R$  жиыны  $q(M^{eq})$  бойынша барлық жерде тығыз болмайды.

Лемма 1.2.1 және 1.2.2 теоремасы бойынша тек шекті  $(p, q)$ -секаторлары бар. Сондықтан,  $\sup E_k^q(b, M)$  немесе  $f^R(a) = \inf E_k^q(b, M)$  және  $k$  — минимальды қасиетімен кез келген  $a \in p(M)$  үшін  $b \in q(M)$  табылады, яғни  $1 \leq k \leq n - 1$  және  $R(x, y)$   $(p, q)$ -секаторлары болады.

Сонда  $\rho_{v(p,q)}$  ішінен келесі  $2(n - k)$  белгі формулалары қалады:

$$\theta_{p,2n+1,q}(x, y) := f^R(x) < y \wedge \neg E_k^q(f^R(x), y) \wedge E_{k+1}^q(f^R(x), y),$$

$$\theta_{p,2n+2,q}(x, y) := f^R(x) > y \wedge \neg E_k^q(f^R(x), y) \wedge E_{k+1}^q(f^R(x), y),$$

... ..

$$\theta_{p,4n-2k,q}(x, y) := f^R(x) < y \wedge \neg E_{n-1}^q(f^R(x), y),$$

$$\theta_{p,4n-2k+1,q}(x, y) := f^R(x) > y \wedge \neg E_{n-1}^q(f^R(x), y),$$

және келесі  $\rho_{v(q,p)}$ -тан  $2(n - k)$  белгіленген формулалары қалады:

$$\theta_{q,4n-2k+2,p}(x, y) := x > f^R(y) \wedge \neg E_k^q(x, f^R(y)) \wedge E_{k+1}^q(x, f^R(y)),$$

$$\theta_{q,4n-2k+3,p}(x, y) := x < f^R(y) \wedge \neg E_k^q(x, f^R(y)) \wedge E_{k+1}^q(x, f^R(y)),$$

... ..

$$\theta_{q,6n-4k+1,p}(x, y) := x > f^R(y) \wedge \neg E_{n-1}^q(x, f^R(y)).$$

$$\theta_{q,6n-4k+2,p}(x, y) := x < f^R(y) \wedge \neg E_{n-1}^q(x, f^R(y)).$$

1-жағдайға ұқсас, кез келген  $\mathbf{l}, \mathbf{m}$  белгілері үшін  $\mathbf{l} \in \{2\mathbf{n} + 1, \dots, 4\mathbf{n} - 2\mathbf{k} + 1\}$  және  $\mathbf{m} \in \{4\mathbf{n} - 2\mathbf{k} + 2, \dots, 6\mathbf{n} - 4\mathbf{k} + 2\}$  болатындай  $\mathfrak{P}_{v(p)}$  және  $\mathfrak{P}_{v(q)}$

## 4 САНАЛЫМДЫ КАТЕГОРИЯЛЫҚ ӘЛСІЗ ЦИКЛДЫ МИНИМАЛДЫ ҚҰРЫЛЫМДАРДАҒЫ БИНАРЛЫҚ ФОРМУЛАЛАР

### 4.1 Алдын ала мәлімет

$M = \langle M, =, < \rangle$  сызықтық реттелінген құрылым болсын. Егер сызықтық реттелінген жиынның екі ұшын  $M$  (мүмкін бұл  $-\infty$  және  $+\infty$ ) қосатын болсақ, онда циклдік ретті аламыз.

Неғұрлым формальды келтірсек, циклдік реттілік келесі аксиомаларды қанағаттандыратын  $K$  үштік қатынасымен сипатталады:

$$(co1) \forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \rightarrow K(y, z, x));$$

$$(co2) \forall x \forall y \forall z ([K(x, y, z) \wedge K(y, x, z)] \Leftrightarrow [x = y \vee y = z \vee z = x]);$$

$$(co3) \forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \rightarrow \forall t [K(x, y, t) \vee K(t, y, z)]);$$

$$(co4) \forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \vee K(y, x, z)).$$

Келесі теорема сызықтық және циклдік реттілікке қатысты.

**Теорема 4.1.1** ([62]) Егер  $\langle M, \leq \rangle$  сызықтық реттелінген құрылым, алынған  $\leq$  ережесі бойынша  $K$  үштік қатынас

$$K(x, y, z) := (x \leq y \leq z) \vee (z \leq x \leq y) \vee (y \leq z \leq x) \quad (4.1)$$

болса, онда  $K$   $M$ -құрылымында циклдік реттің құрылымын береді.

Керісінше, егер  $\langle N, K \rangle$  циклдік реттілік болса,  $\alpha \in N$ , онда  $y \leq z \Leftrightarrow K(\alpha, y, z)$  ережесімен  $M := N \setminus \{\alpha\}$  анықталатын  $\leq$  қатынасы сызықтық реттілік болады.

Оның үстіне, бұл реттілік қатынасты барлық  $\beta \in M$  үшін  $\beta < \alpha$  ережесі бойынша  $N$  -ге кеңейтетін болсақ, онда пайда болған циклдік қатынас  $K$  -тің бастапқы циклдік реті болады.

Егер  $M = \langle M, =, <, \dots \rangle$  сызықтық реттелген құрылым болса, онда  $c(M)$   $M^* = \langle M, =, K^3, \dots \rangle$  құрылымын білдіреді, мұнда  $<$  сызықтық реті  $K^3$  үштік қатынасымен келесідегідей ауыстырылады, яғни кез келген  $a, b, c \in M$  элементтері үшін

$$K(a, b, c) \Leftrightarrow a \leq b \leq c \vee b \leq c \leq a \vee c \leq a \leq b \quad (4.2)$$

$$(2) K_0(x, y, z) := K(x, y, z) \wedge x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x.$$

(3)  $K(u_1, \dots, u_n)$  - ұзындығы үш кортежді  $\langle u_1, \dots, u_n \rangle$  (өсу ретімен) барлық ішкі жиындар  $K$  -ны қанағаттандыратын формуланы білдіреді;  $K_0$ -ға да үшін ұқсас белгілер.

(4)  $A, B, C$  циклдік реттелген  $M$  құрылымының жұптастырылған дөңес ішкі жиындары болсын. Кез келген  $a, b, c \in M$  үшін  $a \in A, c \in C, b \in B$  болған кезде  $K(a, b, c)$  шығады оны  $K(A, B, C)$  деп жазамыз. Бұл белгіні өз жолымен кеңейтеміз, мысалы,  $K_0(A, b, C, D)$  жазбасын қолдану арқылы.

$I \subseteq M$  болсын, мұндағы  $M$  циклдік реттелген құрылым. Кейбір  $a, b \in M$  үшін  $I = \{c \in M : M \models K_0(a, c, b)\}$  жиыны ашық интервал болады. Егер  $I$  ашық интервал болса, оны кейде  $I$ -дың соңғы нүктелерін көрсету үшін  $I = (a, b)$  деп

жазамыз. Сол сияқты жабық, жартылай ашық-жартылай жабық және т.б. анықтауға болады.  $M$  интервалы деп  $M$  интервалдарының жоғарыда көрсетілген кез келген түрін айтамыз.

Келесі ұғымды алғаш рет Д.Макферсон мен С.Стейнхорн енгізді [9]. Олар циклдік реттелген группаларды сипаттады, олар циклдік минималды болып табылады.

**Анықтама 4.1.3.** [9] Егер  $M$  - құрылымының кез келген анықталатын (параметрлері бар) ішкі жиыны  $M$  - дегі интервалдар мен нүктелердің соңғы санының бірігуі болса онда циклдік реттелген құрылым  $M = \langle M, =, K^3, \dots \rangle$  циклдік минималды деп аталады.

**Мысал 4.1.4.**  $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  болсын, мұндағы  $\mathbb{C}$  комплекс сандар жиыны.  $G = \langle G, =, *, K^3 \rangle$  құрылымын қарастырайық, мұндағы  $*$  - комплекс сандарға көбейту болып табылатын бинарлық операция.

$\langle G, * \rangle$  группа екені анық.  $G$  циклді минималды екенін дәлелдеу оңай.

Циклдік реттелген құрылымның  $M = \langle M, =, K, \dots \rangle$  ішкі жиыны  $A$  дөңес деп аталады, егер  $A$  жиынындағы  $a$  және  $b$  кез келген элементтері немесе  $K(a, M, b)$  кез келген элемент  $A$  жиынында болса, немесе  $K(b, M, a)$  кез келген элемент  $A$  ішінде болса.

Әлбетте, интервал да, нүкте де дөңес жиындарды құрайды.

**Анықтама 4.1.5.** [14] Кез келген параметрлік анықталған жиын дөңес жиындардың соңғы санының бірігуі болса, циклдік реттелген құрылым  $M = \langle M, =, K, \dots \rangle$  әлсіз циклдік минималды болады.

**Мысал 4.1.6.**  $M = \langle \omega + \omega^* + Q + \omega + \omega^* + Q, < \rangle$  сызықтық реттелген құрылым болсын, мұндағы  $\omega$  – натурал сандардың реті,  $\omega^*$  – натурал сандардағы кері рет, ал  $Q$  – рационал сандардың реті. Сонда  $c(M)$  циклдік реттелген құрылым. Сонымен қатар  $c(M)$  шын мәнінде әлсіз циклдік минималды құрылым екенін дәлелдеуге болады.  $\omega + \omega^*$  көшірмелерінің бірінші элементтерін  $a$  және  $c$  арқылы, ал соңғы элементтерін  $b$  және  $d$  арқылы белгілесек. Келесі формуланы қарастыруға болады:

$$\phi(x) := \forall y \forall z [K_0(y, x, z) \rightarrow \exists t_1 \exists t_2 (K_0(y, t_1, x) \wedge K_0(x, t_2, z))] \quad (4.3)$$

Сонда  $\phi(M) = \{x \in M \mid M \models K_0(b, x, c) \vee K_0(d, x, a)\}$ , және  $\phi(M)$  толық типті іске асыру жиыны, бірақ ол дөңес емес; бұл о-минималды (немесе әлсіз о-минималды) құрылымдарда да мүмкін емес.

**Мысал 4.1.7.**  $M = \langle Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4, <, P^1 \rangle$  сызықты реттелген құрылым болсын, мұнда  $Q_i$  әрбір  $i \leq 4$  және  $P(M) = Q_1 \cup Q_3$  үшін рационал сандар ретінің көшірмесі. Сонда  $c(M)$  – әлсіз циклдік минималды құрылым болады.

$P(M)$  интервалдар да, нүктелер де болмайтын екі дөңес жиындардың бірігуі екенін көру оңай. Сондықтан  $c(M)$  циклді минималды емес. Сондай-ақ  $P(M)$  екі дөңес жиынның бірігуі болып табылады, олардың ешқайсысы да  $\emptyset$ -а анықталмайды. Бұл әрбір параметрлік анықталған жиын бірдей параметрлермен анықталған дөңес жиындардың соңғы санының бірігуі болатын әлсіз о-минималды жағдайдан ерекше еленеді.

Циклдік реттелген құрылымындағы қима  $K(a, x, b)$  пішінінің  $M$  үстіндегі формулалардың максималды сәйкес жиыны, мұндағы  $a, b \in M$ . Қиманы жасайтын  $c \in M$  бар болса, қима алгебралық болады. Олай болмаған жағдайда, қима алгебралық емес деп аталады.

$C(x)$  алгебралық емес қима болсын. Кез келген  $a \in M$  үшін  $K(a, x, b) \in C(x)$  бар болса, немесе кез келген  $b \in M$  үшін  $K(b, x, a) \in C(x)$  бар болса, онда  $C(x)$  бөлімі рационал деп аталады. Олай болмаған жағдайда, мұндай қима иррационал деп аталады.

$$C_1(x) := \{K(e_1, x, e_2) | e_1, e_2 \in M, K_0(e_1, a_0, e_2)\} \quad (4.4)$$

ерікті бекітілген  $a_0 \in M$ , алгебралық қиманы анықтайды ( $a_0$  берілген қиманы жүзеге асырады), ал  $C_2(x) := \{K(b, x, e) | e \in M, e \neq b\}$  мұндағы  $b$  көшірмелердің бірінің соңғы элементі  $\omega + \omega^*$  алгебралық емес рационал кесіндіні анықтайды.

$M$  жиынында анықталатын  $C(x)$  қимасы келесі қасиетке ие бөлім болып табылады:  $\{y \in M: K(a, y, b) \text{ и } K(a, x, y) \in C(x)\}$  және  $K(a, x, b) \in C(x)$  анықталатын  $a, b \in M$  бар болады. 4.1.7-мысалын да

$$C(x) := \{K(a, x, b) | a \in Q_1, b \in Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4\} \quad (4.5)$$

анықтауға болатын иррационал қиманы анықтайды.

Анықталатын толықтыру құрылым  $M$  қисынсыз құрылымның барлық анықталатын қималарынан тұрады.

$M$  құрылымының Анықталатын толықтыруы  $\overline{M}$  – иррационал болатын  $M$  құрылымының барлық анықталатын қималарынан тұрады. Циклдік реттілік  $K$  кеңейтудің  $\overline{M}$  өзіндік жолы бар, біз оны нақты бермейміз.  $\overline{M}$  негізінен  $M^{eq}$  құрылымының белгілі бір түрлерінің бірігуі екенін ескерсек. Біз онда анықталатын (қатаң айтқанда, түсіндірілетін) ішінара функцияларды  $M \rightarrow \overline{M}$  қарастырамыз.

$f: \overline{M} \rightarrow \overline{M}$  – де  $Dom(f) = I \subseteq M$  анықталу облысымен унарлы функция болсын, мұндағы  $I$  ашық дөңес жиын. доменінде біртұтас функция болсын, мұндағы  $I$  ашық дөңес жиын.  $I$  бойынша  $f$  оң (сол жақ) монотонды деп аталады, егер ол  $K_0$  қатынасын сақтаса (кері), яғни  $K_0(a, b, c)$  болатындай кез келген  $a, b, c \in I$  үшін  $K_0(f(a), f(b), f(c)) (K_0(f(c), f(b), f(a)))$ .

$Q^2 := \{(x_0, x_1) | x_i \in Q\}, <_{lex}\}$  лексикографиялық реттелген рационал сандардың барлық мүмкін жұптарының жиыны болсын. Шексіз дөңес кластардың шексіз санымен анықталатын эквиваленттік қатынас болмаса, әлсіз циклдік минималды теорияның дөңес дәрежесі 1 болады.

**Мысал 4.1.8**  $M = \langle M, =, K^3, E^2, f^1 \rangle$  циклдік реттелген құрылым болсын,  $M$  жиыны  $Q^2$  реттілігінің көшірмелері болып табылатын  $Q_1^2$  және  $Q_2^2$  жиындарының ажыратылған бірлестігі.  $E$  эквиваленттік қатынасы: кез келген элементтер үшін  $x = (x_0, x_1), y = (y_0, y_1) \in M$   $E(x, y) \Leftrightarrow x_0 = y_0$ , яғни бірінші координаталары бірдей болады. Кез келген  $x = (x_0, x_1) \in M$  үшін  $f((x_0, x_1)) =$

$(-x_0, x_1)$  және  $f(Q_1^2) = Q_2^2, f(Q_2^2) = Q_1^2$  функциясын анықтаймыз.

$M$  әлсіз циклдік минималды құрылым екенін дәлелдеуге болады.  $E$  эквиваленттік қатынасы  $M$  - ді шексіз дөңес кластардың шексіз санына бөледі, сондықтан  $Th(M)$  1-дәрежелі дөңестік теориясы болмайды. Ол  $f$   $M$  -да жергілікті монотонды.

**Теорема 4.1.9** [14]  $M$  әлсіз циклдік минималды құрылым болсын.

Сонда кез-келген  $A \subseteq M$  және  $M$  -де  $A$ - анықталатын  $f$  унарлы функция үшін  $m < \omega$  және анықталу аймағын  $Dom(f)$   $X, I_1, \dots, I_m$  жиындарына бөлуге болады, мұнда  $X$  шекті, әр  $I_i$  ашық және дөңес, және әр  $I_i$  жиынында  $f$  функциясы жергілікті монотонды немесе жергілікті тұрақты.

**Анықтама 4.1.10.** [14]  $M$  циклдік реттелген құрылым болсын.

(i)  $p \in S_1(\emptyset)$  болсын. Егер  $M$  - ның кез келген элементар  $N$  кеңейтімі үшін  $p(N)$   $n$  максималды дөңес жиындардың ( $p(N)$  дөңес құрамдастары деп аталады) ажырамас бірігуі болса,  $p$   $n$  - дөңес деп айтамыз. Басқаша,  $p$  дөңес емес деп айтамыз.

(ii) Әрбір  $p \in S_1(\emptyset)$  типі  $n$  -дөңес болса онда  $M$   $n$  -дөңес деп болады, және егер бұл барлық  $N \equiv M$  үшін болса,  $Th(M)$   $n$  - дөңес деп айтамыз.

(iii)  $\phi(x)$   $\emptyset$ -анықталатын формула болсын. Егер  $\phi(M)$  дөңес болса,  $\phi(x)$  дөңес болады.  $\phi(x)$  дөңес емес формуланы  $n$  -дөңес (мұндағы  $n \geq 2$ ) деп айтамыз, егер  $n$  ең кіші сан болса,  $\phi(M)$   $M$  құрылымының  $n$  дөңес ішкі жиынының ажыратылған бірігуі.

**Теорема 4.1.11.** [14]  $M$  әлсіз циклдік минималды құрылым болсын. Сонда  $M$  —  $n$ -дөңесті орындалатындай,  $n < \omega$  бар болады.

Нәтижесінде, атап айтқандай, егер  $M$  әлсіз циклді минималды құрылым және  $p \in S_1(\emptyset)$  болса, онда  $p(M)$  дөңес жиындардың ақырлы санының бірігуінен болады.

Әрбір  $b \in p(M)$  үшін  $F(M, b)$  дөңес шексіз тең шексіз жиын болса,  $M, b \subset p(M)$ ,  $p \in S_1(\emptyset)$  және  $F(x, y)$  —  $\emptyset$  анықталатын формула болсын.  $y \in F(M, y)$  жиынының сол жақ шеткі нүктесін қандай екенін көрсететін  $F^l(y)$  формуласы:

$$\begin{aligned} & \exists z_1 \exists z_2 [K_0(z_1, y, z_2) \wedge \forall t_1 (K(z_1, t_1, y) \wedge t_1 \neq y \rightarrow \neg F(t_1, y)) \wedge \\ & \wedge \forall t_2 (K(y, t_2, z_2) \wedge t_2 \neq y \rightarrow F(t_2, y))] \end{aligned} \quad (4.6)$$

$F(x, y)$  оңға қарай  $p$  тұрақты дөңес екенін айтамыз, егер әрбір  $b \in p(M)$  үшін

$$M \models \forall x [F(x, b) \rightarrow F^l(b) \wedge \forall z (K(b, z, x) \rightarrow F(z, b))] \quad (4.7)$$

$\neg F(a, b)$  және  $K_0(b, M, a) \subseteq p(M)$  орындалатын  $a \in p(M)$  бар.

$F_1(x, y), F_2(x, y)$  ерікті  $p$  -тұрақты оңға дөңес формулалар болсын. Егер  $F_1(M, a) \subset F_2(M, a)$  орындалатындай  $a \in p(M)$  болса онда  $F_2(x, y)$   $F_1(x, y)$ ден үлкен деп айта аламыз.

Бұл барлық  $p$  -тұрақты оң жақ дөңес формулалардың  $F(x, y)$  (модуль

бойынша  $Th(M)$  эквиваленттілігі деп есептелетін) жиынында жалпы реттілік береді.

$f(y) - F(M, y)$  жиынының оң жақ соңғы нүктесі болатындай, ол  $M$  құрылымының анықталатын  $\overline{M}$  аяқталуында жатқан  $f(y) := rend_r F(M, y)$  деп жазамыз. Сонда  $f - p(M)$  мәнін  $\overline{M}$ -де көрсететін функция. Сол сияқты, біз  $p$ -тұрақты сол-дөңес формулаларды да қарастырып, жазуға болады  $f(y) := lend_L F(M, y)$ , яғни жиынның сол  $f(y)$  жақ шеткі нүктесі болып табылады,  $F(M, y)$  да  $M$  құрылымның анықталатын аяқталуында  $\overline{M}$  жатыр.

$F(x, y)$  оңға қарай дөңес  $p$ -тұрақты формула болсын. [4] анықтамасына қарап, біз бұл  $F(x, y)$  эквиваленттілікті тудыратын деп айтамыз,  $M \models F(\beta, \alpha)$  болатын егер кез келген  $\alpha, \beta \in p(M)$  осындай үшін төмендегі жағдай орындалса:

$$M \models \forall x (K(\beta, x, \alpha) \wedge x \neq \alpha \rightarrow [F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta)]) \quad (4.8)$$

**Мысал 4.1.12.**  $M = \langle Q, K^3, R^2 \rangle$  циклдік реттелген құрылым,  $Q$  рационал сандар жиыны; кез келген  $a, b \in M$  үшін  $M \models R(b, a) \Leftrightarrow K(a, b, a + \sqrt{2})$  және де  $R(M, a) = \{b \in M | K(a, b, a + \sqrt{2})\}$  сәйкесінше  $R(a, M) = \{b \in M | K(a - \sqrt{2}, b, a)\}$ .  $a + \sqrt{2}$ , және  $a - \sqrt{2}$   $M$  да жатпайтыны анық.

$R^1(x, y) := \exists z [R(z, y) \wedge R(x, z)]$  болсын. Сонда, кез келген  $a, b \in M$  үшін

$$M \models R^1(b, a) \Leftrightarrow K(a, b, a + 2\sqrt{2}) \quad (4.9)$$

Әрбір  $n < \omega$  үшін

$$R^n(x, y) := \exists z_1 \dots \exists z_n [R(z_1, y) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < n} R(z_{i+1}, z_i) \wedge R(x, z_n)]. \quad (4.10)$$

Кез келген  $a, b \in M$  үшін

$$M \models R^n(b, a) \Leftrightarrow K(a, b, a + (n + 1)\sqrt{2}) \quad (4.11)$$

Сәйкесінше, кез келген  $a \in M$  үшін:

$$R(M, a) \subset R^1(M, a) \subset \dots \subset R^n(M, a) \subset \dots \quad (4.12)$$

жұптық эквивалентті емес 2-формулалардың шексіз саны бар, сондықтан  $Th(M)$  саналымды категориялық емес.

$Th(M)$  әлсіз циклдік минималды теория екенін дәлелдеуге болады.  $p(x) := \{x = x\}$  болсын.  $p(x) \in S_1(\emptyset)$  екенін түсіну оңай. Бұл  $R(x, y)$   $p$ -тұрақты оң жақ дөңес формула және  $R(x, y)$  эквивалент тудырушы формула емес екені анық.

Егер қандай да бір кез келген  $a_1, a_2, \dots, a_k \in M$  және кез келген  $b_1, b_2, \dots, b_k \in M$  үшін  $g(a_1) = b_1, g(a_2) = b_2, \dots, g(a_k) = b_k$  орындалатындай

$g \in \text{Aut}(M)$  бар болса онда циклдік реттелген  $M$  құрылымы  $k$ -транзитивті болады. [14], [63] және [64] - жұмыстарында санаулымды категориялық 1-транзитивті әлсіз циклді минималды құрылымдар зерттеліп, олардың екілік жүйеге дейінгі сипаттамасы алынды. Мұнда 1-транзитивті болмайтын санаулымды категориялық әлсіз циклдік минималды құрылымдар зерттеледі. Сондай-ақ, кез келген формула ең көбі екі бос айнымалыдағы формулалардың логикалық комбинациясына эквивалентті болса,  $T$  толық теориясы бинарлы болады. [65]-ші жұмыста дөңестік дәрежесі 1 болатын саналымды категориялық әлсіз о-минималды бинарлы теориялары сипатталды, ал [66]-де дөңестік дәрежесі 1 болатын саналымды категориялық әлсіз о-минималды теориясының бинарлығы алынды.

Циклдік реттілік үштік қатынаспен анықталатындықтан, әлсіз циклдік минималды құрылым болмайтынын ескереміз. Егер кез келген формула ең көбі екі бос айнымалы бар және  $K(x, y, z)$  (циклдік реттік қатынасты білдіретін) формулаларының логикалық комбинациясына эквивалентті болса, онда әлсіз циклдік минималды  $T$  теориясы бинарлы дерлік болады.

#### 4.2 Дөңестік дәрежесі 1 болатын саналымды категориялық әлсіз циклдік минималды $n$ -дөңес дерлік бинарлы теориясы

**Лемма 4.2.1.**  $M$  саналымды категориялық әлсіз циклдік минималды құрылым болсын,  $p \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес,  $f: M \rightarrow \overline{M}$   $\emptyset$  бос анықталатын, анықтау облысы құрамында  $p(M)$  бар функция болсын.  $f$  функциясын  $p(M)$  - да локалды монотонды (қатаң емес монотонды) немесе локалды константа (тұрақты емес) деп есептейік. Сонда  $p(M)$  шексіз дөңес кластардың шексіз санына бөлетін  $\emptyset$ -анықталатын эквиваленттік қатынасы  $E_f(x, y)$  болады.

4.2.1 Леммасын дәлелдеу.  $f$   $p(M)$  – қарай оңға локалды монотонды деп есептейміз.  $M$  – ның саналымды категориясымен  $\emptyset$  – анықталатын  $p(M) = U^p(M)$  болатындай  $U^p(x)$  – формуласы бар. Сонда

$$E_f(x, y) := [\forall t(K(x, t, y) \rightarrow U^p(t)) \rightarrow \forall u(K_0(x, u, y) \rightarrow K_0(f(x), f(u), f(y)))] \wedge \\ \wedge [\forall t(K(y, t, x) \rightarrow U^p(t)) \rightarrow \forall u(K_0(y, u, x) \rightarrow K_0(f(y), f(u), f(x)))]. \quad (4.13)$$

**Лемма 4.2.2.**  $M$  саналымды категориялық әлсіз циклдік минималды құрылым,  $p \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес және  $F(x, y) - p$  – тұрақты, оңға дөңес формула болсын. Сонда

1)  $G(x, y) := F(y, x) - p$  тұрақты, сол жаққа дөңес, эквиваленттілікті тудырушы формула.

2)  $E(x, y) := F(x, y) \vee F(y, x)$   $p(M)$  - ды дөңес кластарға бөлетін эквиваленттік қатынас болып табылады.

4.2.2 Лемманың дәлелі.  $M$  саналымды категориялық болғандықтан,  $\emptyset$  - анықталатын,  $p(M) = U(M)$  орындалатын  $U(x)$  формуласы болады.

1)  $\alpha \in p(M)$  е алып,  $G(M, \alpha)$  қарастырайық, яғни  $F(\alpha, M)$ .  $F(x, y) - p$  -

тұрақты оңға қарай дөңес болғандықтан,  $\neg F(b, a)$  және  $K(a, M, b) \subseteq p(M)$  орындалатындай кез келген  $a \in p(M)$  үшін  $b \in p(M)$  болады. Демек :  $M \models \theta(b)$  орындалады мұнда

$$\theta(y) := \exists x [U(x) \wedge \neg F(y, x) \wedge \forall z (K(x, z, y) \rightarrow U(z))] \quad (4.14)$$

Соңғы формула  $\emptyset$ -анықталатындықтан, кез келген  $\alpha \in p(M)$  үшін дұрыс болады. Демек,  $\neg F(\alpha, \beta)$  және  $K(\beta, M, \alpha) \subseteq p(M)$  орындалатындай  $\beta \in p(M)$  бар.

$K(\beta_1, M, \beta_2) \subseteq p(M)$  және  $M \models F(\alpha, \beta_1) \wedge F(\alpha, \beta_2)$  болатындай ерікті  $\beta_1, \beta_2 \in p(M)$  қарастырайық.  $K(\beta_1, \beta_2, \alpha)$  және  $F(x, y)$  эквивалент тудырушы болғандықтан,  $K(\beta_1, \beta', \beta_2)$  шарты бар кез келген  $\beta' \in M$  үшін  $F(\alpha, \beta')$  бар. Сондықтан ол  $G(M, \alpha)$  дөңес. Енді  $G^r(\alpha)$  келетін болсақ. Шынында да, егер бұл дұрыс болмаса, онда  $K_0(\alpha, M, \gamma) \subseteq p(M)$  және  $G(\gamma, \alpha)$  болатындай  $\gamma \in p(M)$  болар еді, яғни,  $F(\alpha, \gamma)$ , мұндағы  $F^l(\gamma)$  орындалмайды, бұл  $F(x, y)$   $p$ -тұрақты оң жақ дөңес екеніне қайшы. Сондықтан  $G(x, y)$  солға қарай -  $p$  тұрақты дөңес.

$G(x, y)$  эквивалент тудырушы екенін дәлелдесек. Керісінше делік: яғни  $G(x, y)$  эквивалент тудырмайды делік. Сонда келесі жағдайлар болуы мүмкін:  
1-жағдай. Онда

$$M \models K_0(\alpha, \beta, \gamma) \wedge G(\gamma, \alpha) \wedge \neg G(\gamma, \beta) \quad (4.15)$$

орындалатындай,  $\alpha, \beta, \gamma \in p(M)$  болады.

Сонда:  $F(x, y)$   $p$  тұрақты оң-дөңес формуласы ол

$$M \models F(\alpha, \gamma) \wedge \neg F(\beta, \gamma) \wedge K_0(\gamma, \beta, \alpha) \quad (4.16)$$

қарама қайшы.

2-жағдай.  $\alpha, \beta, \gamma \in p(M)$  бар

$$M \models K_0(\alpha, \beta, \gamma) \wedge G(\beta, \alpha) \wedge G(\gamma, \beta) \wedge \neg G(\gamma, \alpha) \quad (4.17)$$

Сонда:  $F(x, y)$  эквиваленттілік тудырушыға қарама қайшы

$$M \models F(\beta, \gamma) \wedge F(\alpha, \beta) \wedge \neg F(\alpha, \gamma) \wedge K_0(\gamma, \beta, \alpha) \quad (4.18)$$

бар. Осылайша  $G(x, y)$  эквиваленттілікті тудырады.

2)  $E(x, y)$  рефлексиялық және симметриялы екені анық.  $E$  қатынастың транзитивтілігін дәлелдеп көрейік.  $M \models E(\alpha, \beta) \wedge E(\beta, \gamma)$  болсын. Жалпылықты жоғалтпай,  $K_0(\alpha, \beta, \gamma)$  және  $K(\alpha, M, \gamma) \subseteq p(M)$  деп алсақ. Сонда  $M \models F(\beta, \alpha) \wedge F(\gamma, \beta)$  бар.  $F(x, y)$  эквивалент тудырушы болғандықтан,  $F(\gamma, \alpha)$  орындалады демек  $E(\gamma, \alpha)$  та орындалады. Осылайша,  $E(x, y)$  эквиваленттік қатынас болады.

Кез келген  $\alpha \in p(M)$  үшін  $E(\alpha, M)$  дөңес екенін дәлелдесек.  $\gamma_1, \gamma_2 \in E(\alpha, M)$  болсын. Егер  $K_0(\alpha, \gamma_1, \gamma_2)$  және  $K(\alpha, M, \gamma_2) \subseteq p(M)$ , онда  $M \models$

$F(\gamma_1, \alpha) \wedge F(\gamma_2, \alpha)$ .  $F(x, y)$  оңға қарай  $p$ -тұрақты дөңес болғандықтан,  $\gamma \in K(\gamma_1, M, \gamma_2)$  үшін де  $F(\gamma, \alpha)$  орындалады демек  $E(\gamma, \alpha)$  орындалады. Егер  $K_0(\gamma_1, \alpha, \gamma_2)$  және  $K(\gamma_1, M, \gamma_2) \subseteq p(M)$  болса, онда:  $M \models F(\alpha, \gamma_1) \wedge F(\gamma_2, \alpha)$  орындалады.  $F(x, y)$  эквивалент тудырушы болғандықтан, онда  $F(\gamma_2, \gamma_1)$  орындалады демек, кез келген  $\gamma \in p(M)$  үшін  $F(\gamma, \gamma_1)$   $\gamma \in K(\gamma_1, M, \gamma_2)$  болатындай, сонда  $F(\gamma, \alpha)$  немесе  $F(\alpha, \gamma)$  аламыз яғни  $E(\alpha, \gamma)$ . Басқа жағдайлар да осылай қарастырылады.

**Теорема 4.2.3.**  $M$  - 1-транзитивті болмайтын, саналымды категориялық әлсіз циклды минималды құрылым болсын,  $p \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес. Сонда кез келген  $p$ -тұрақты оң жақ дөңес формула эквивалент тудырушы болып табылады.

4.2.3 теореманы дәлелдеу. 4.1.11 теоремасы бойынша  $M$  құрылымы кейбір  $n \in \omega$  үшін  $n$  дөңес болады. Егер  $n = 1$ , онда  $M$  циклдік тәртіппен үйлесімі бар  $\emptyset$ -анықталатын сызықтық тәртіпке қатысты әлсіз о-минималды құрылым. Сонда теореманың қорытындысы саналымды категориялық әлсіз о-минималды құрылымдар үшін бұрын алынған нәтижелерден шығады [56].  $n > 1$  делік.

$1 \leq i \leq n$  жағдайында  $p(M) = \bigcup_{i=1}^n U_i^p$  және  $K_0(U_1^p, U_2^p, \dots, U_n^p)$  болатындай  $U_i^p$  дөңес жиындары болады. Бұл жиындар  $p$  типті дөңес компоненттер деп аталады.  $F(x, y)$  оңға қарай дөңес,  $p$ -тұрақты формула болсын және  $f(y) := \text{rend}_p F(M, y)$ .  $f$  функциясының әрекетін  $p(M)$  да зерттейміз.

Жағдай 1.  $f p(M)$  да константа.  $\alpha \in p(M)$  еріктісін алып,  $F(M, \alpha)$  қарастырайық.  $F(M, \alpha)$  шексіздігіне байланысты  $\gamma \neq \alpha$  және  $\gamma \in F(M, \alpha)$  болатындай  $\gamma \in p(M)$  бар. Демек,  $\neg F(\beta, \alpha) \wedge K_0(\alpha, \gamma, \beta)$  шартымен  $\beta \in U_i^p$  болады және  $F(M, \alpha) \subset U_i^p$  шартымен  $i \leq n$  болады. Себебі  $f p(M)$  да тұрақты шама болғандықтан  $F(M, \beta) \not\subseteq p(M)$  шығады. Қарама-қайшылық.

Жағдай 2.  $f p(M)$  да оңға қарай монотонды. Мына формулаларды қарастырсақ:

$$F^1(x, y) := F(x, y); F^2(x, y) := \exists t[F^1(t, y) \wedge F(x, t)]; \dots;$$

$$F^n(x, y) := \exists t[F^{n-1}(t, y) \wedge F(x, t)]; \dots \quad (4.19)$$

$F^1(M, \alpha) \subset F^2(M, \alpha) \subset \dots \subset F^n(M, \alpha) \subset \dots$   $T$ -ның саналымды категориясына қайшы келетіні анық.

Жағдай 3.  $f p(M)$  да солға монотонды.

$$M \models \exists x[F(x, \alpha) \wedge \forall y(F(y, x) \rightarrow F(y, \alpha))] \quad (*) \quad (4.20)$$

Керісінше айтсақ:  $M \models \forall x[F(x, \alpha) \rightarrow \exists y(F(y, x) \wedge \neg F(y, \alpha))]$ .  $\beta \neq \alpha$  болатындай, ерікті  $\beta \in F(M, \alpha)$  және  $\gamma \in F(M, \beta)$  болатындай  $\gamma \notin F(M, \alpha)$  қарастырсақ. Сонда:  $M \models K_0(\alpha, \beta, \gamma) \wedge K_0(f(\alpha), f(\beta), f(\gamma))$ ,  $f$  функциясының сол жақ монотондылығына қайшы келеді. Сондықтан  $(*)$  қанағаттандырылады.

Сонда

$$M \models \exists x[F(x, \alpha) \wedge \exists y(F(y, x) \wedge \neg F(y, \alpha))] \quad (**) \quad (4.21)$$

$M \models \forall x[F(x, \alpha) \rightarrow \forall y(F(y, x) \rightarrow F(y, \alpha))]$  кері жағдайын қарастырсақ.  $\beta \neq \alpha$  болатындай  $\beta \in F(M, \alpha)$  қарастырымыз. Яғни,  $K_0(f(\beta), \gamma, f(\alpha))$  болатындай  $\gamma \in F(M, \alpha)$  шығады. Яғни  $K_0(f(\alpha), f(\beta), f(\gamma))$  болатындай

$$M \models K_0(\alpha, \beta, \gamma) \wedge K_0(f(\beta), f(\gamma), f(\alpha)) \quad (4.22)$$

Демек қарама-қайшылық. Сонда (\*\*) жағдайы орындалады. 2 жағдайда қарастырылған  $F^1(x, y), F^2(x, y), \dots, F^n(x, y), \dots$  формулаларын жіктей отырып

$$F^1(M, \alpha) \subset F^2(M, \alpha) \subset \dots \subset F^n(M, \alpha) \subset \dots \quad (4.23)$$

аламыз, ол дегеніміз  $T$  саналымды категориялығына қайшы келеді.

Жағдай 4.  $f p(M)$  -да жергілікті монотонды. Содан кейін бар  $\emptyset$  - анықталатын,  $p(M)$  шексіз дөңес кластарды шексіз санға бөлетін  $E_1, E_2, \dots, E_s$  эквиваленттік қатынастары бар, сондықтан  $E_i$  әрбір  $1 \leq i \leq s-1$  үшін  $E_{i+1}$  нақтылайды,  $f$  әрбір  $\alpha \in p(M)$  үшін  $E_1(M, \alpha)$  бойынша оң (сол) монотонды,  $f$  сол (оң) монотонды  $E_2(M, \alpha)/E_1, \dots, f E_s(M, \alpha)/E_{s-1}$  бойынша қатаң монотонды, ал  $p(M)/E_s$  бойынша  $f$  қатаң монотонды.  $\alpha \in p(M)$  еріктісін алайық.  $M \models K_0(\beta, \gamma, f(\beta)) \wedge \neg E_s(\gamma, \alpha)$  болатындай,  $\beta \in E_s(M, \alpha)$  және  $\gamma \in p(M)$  бар,  $f E_1(M, \alpha)$  бойынша оңға монотонды немесе  $E_1(M, \alpha)$  бойынша солға монотонды болуы мүмкін. Жалпылықты жоғалтпай, біріншіні деп аламыз.

1-қадам.  $M \models K_0(\beta, \gamma, f(\beta)) \wedge \neg E_1(\gamma, \alpha)$  болатындай  $\beta \in E_1(M, \alpha)$  және  $\gamma \in p(M)$  элементтері бар. Қарама қайшылықты қарастырсақ:

$$M \models \forall x[E_1(x, \alpha) \rightarrow \forall y(U(y) \wedge K_0(x, y, f(x)) \rightarrow E_1(y, \alpha))] \quad (4.24)$$

$f E_1(M, \alpha)$  да оңға қарай монотонды болғандықтан кез келген  $\beta \in F(M, \alpha) \setminus \{\alpha\}$  үшін  $M \models K_0(\beta, \gamma, f(\beta)) \wedge \neg F(\gamma, \alpha)$  болатындай  $\gamma \in E_1(M, \alpha)$  бар деп есептейміз. Егер олай болмаса  $F(M, \beta) \subset F(M, \alpha)$  орындалатындай  $\beta$  элементін қарастырамыз,  $K_0(f(\beta), \lambda, f(\alpha))$  шартымен  $\lambda \in F(M, \alpha)$  орындалады.  $K_0(\alpha, \beta, \gamma)$  және  $\neg F(\gamma, \alpha)$  болатындай  $\gamma \in E_1(M, \alpha)$  қарастырамыз. Сонда анық  $K_0(f(\alpha), f(\beta), f(\gamma))$ , бұл  $f$  функцияның дұрыс монотондылығына қайшы келеді. Сондықтан кез келген  $\alpha$  үшін  $\beta \in F(M, \alpha) \setminus \{\alpha\}$  мұндай  $M \models K_0(\beta, \gamma, f(\beta)) \wedge \neg F(\gamma, \alpha)$  бар  $\gamma \in E_1(M, \alpha)$ . Содан кейін 2-жағдайда енгізілген  $F^1(x, y), F^2(x, y), \dots, F^n(x, y), \dots$  формулаларын қарастыра отырып, қайтадан

$$F^1(M, \alpha) \subset F^2(M, \alpha) \subset \dots \subset F^n(M, \alpha) \subset \dots$$

аламыз.

Ол  $T$  саналымды категориялыққа қайшы келеді. Осылайша, 1-қадамда  $M \models$

$K_0(\beta, \gamma, f(\beta)) \wedge \neg E_1(\gamma, \alpha)$  болатындай  $\beta \in E_1(M, \alpha)$  және  $\gamma \in p(M)$  элементтердің бар екенін дәлелдедік.

2 қадам.  $f - E_2(M, \alpha)/E_1$  да солға қарай монотонды.  $M \models K_0(\beta, \gamma, f(\beta)) \wedge \neg E_2(\gamma, \alpha)$  орындалатындай  $\gamma \in p(M)$  және  $\beta \in E_2(M, \alpha)$  элементтері бар. Керісінше алсақ:

$$M \models \forall x [E_2(x, \alpha) \rightarrow \forall y (U(y) \wedge K_0(x, y, f(x)) \rightarrow E_2(y, \alpha))]$$

Содан келесі формулаларды қарастырасақ:

$$F^1(x, y) := \exists t [E_1(t, y) \wedge F(x, t)]; \quad (4.26)$$

$$F^2(x, y) := \exists t \exists u [F^1(t, y) \wedge E_1(t, u) \wedge F(x, u)]; \quad (4.27)$$

$$F^n(x, y) := \exists t \exists u [F^{n-1}(t, y) \wedge E_1(t, u) \wedge F(x, u)]; \dots \quad (4.28)$$

$F(M, \alpha) \subset F^2(M, \alpha) \subset \dots \subset F^n(M, \alpha) \subset \dots$   $T$  саналымды категориясына қайшы келетінін аламыз. Қалған қадамдар дәл осылай дәлелденеді. Осылайша  $M \models K_0(\beta, \gamma, f(\beta)) \wedge \neg E_s(\gamma, \alpha)$  орындалатындай  $\beta \in E_2(M, \alpha)$  және  $\gamma \in p(M)$  элементтері болады.

А жағдайы.  $f$  оңға қарай  $p(M)/E_s$  бойынша монотонды. Келесі формулаларды қарастырасақ:

$$F^1(x, y) := \exists t [E_s(t, y) \wedge F(x, t)]; \quad (4.29)$$

$$F^2(x, y) := \exists t \exists u [F^1(t, y) \wedge E_s(t, u) \wedge F^1(x, u)]; \dots;$$

$$F^n(x, y) := \exists t \exists u [F^{n-1}(t, y) \wedge E_s(t, u) \wedge F^1(x, u)]; \dots$$

Яғни:  $F^1(M, \alpha) \subset F^2(M, \alpha) \subset \dots \subset F^n(M, \alpha) \subset \dots$ ,  $T$  - ның саналымды категориялығына қайшы келеді.

В жағдайы.  $f(M)/E_s$  да солға қарай монотонды.

$$M \models \exists x [F(x, \beta) \wedge \neg E_s(x, \beta) \wedge \forall y (F(y, x) \rightarrow F(y, \beta))] \quad (***)$$

Керісінше делік:

$$M \models \forall x [F(x, \beta) \wedge \neg E_s(x, \beta) \wedge \exists y (F(y, x) \wedge \neg F(y, \beta))].$$

Олай болса  $y$  алсақ. Содан:  $M \models K_0(\beta, x, y) \wedge K_0(f(\beta), f(x), f(y))$ , бұл  $f$  функцияның сол жаққа монотондылығына қайшы.

Сондықтан, (\*\*\*) орын алады.

$$M \models \exists x [F(x, \beta) \wedge \neg E_s(x, \beta) \wedge \exists y (F(y, x) \wedge \neg F(y, \beta))]$$

Керісінше делік :

$$M \models \forall x[F(x, \beta) \wedge \neg E_s(x, \beta) \rightarrow \forall y(F(y, x) \rightarrow F(y, \beta))].$$

Олай болса  $y$  алайық.  $M \models K_0(\beta, x, y) \wedge K_0(f(x), f(y), f(\beta))$ , ол  $f$  функциясының сол жағындағы монотондылыққа қайшы келеді. Одан кейін  $F^i(x, y)$  А жағдайындағыдай қарастырсақ:  $F^1(M, \alpha) \subset F^2(M, \alpha) \subset \dots \subset F^n(M, \alpha) \subset \dots$ ,  $T$  саналымды категориясына қайшы келеді.

4-жағдайды толығымен қарастырылады.

$\alpha \in p(M)$  еріктісін алайық. Егер  $f(\alpha) \in p(M)$ , яғни біздің жағдайымызда мұны кейбір  $i \leq n$  үшін  $\alpha, f(\alpha) \in U_i^p$  аламыз. Сонда 5.2 леммасы [3] бойынша  $f = id$ . Осылайша,  $f$  функцияның жалғыз мүмкіндігі  $f$  тың  $p(M)$  да локалды константа болуы,  $f(\alpha) \notin p(M)$  орындалса. Бұл  $F(x, y)$  формула эквиваленттілікті тудырушы болса ғана мүмкін болады, шексіз дөңес кластардың шексіз санымен эквиваленттік қатынасты тудырады. Теорема дәлелденді.

**Қорытынды 4.2.4**  $M$  саналымды категориялық 1-транзитивті емес әлсіз циклдік минималды құрылымы және  $p \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес дөңестік дәрежесі -1 болатын құрылым болсын. Сонда  $p$ -тұрақты оңға қарай дөңес формуласы болмайды.

**Мысал 4.2.5**  $M = \langle M, K^3, U_1^1, U_2^1, f^1 \rangle$  циклдік реттелген құрылымы болсын, мұнда  $M$   $Q_1, Q_2, Q_3$  және  $Q_4$  жиындарының бірігуінен тұрады, яғни  $K_0(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$  болады. Әрбір  $Q_i$  рационал сандары  $Q$  ретінің көшірмесінен тұрады;

$U_1(M) = Q_1 \cup Q_3$ ,  $U_2(M) = Q_2 \cup Q_4$ .  $f: M \rightarrow M$  функциясы, барлық  $q \in Q$   $f(q) = q$  үшін:  $f(Q_1) = Q_2$ ,  $f(Q_2) = Q_3$ ,  $f(Q_3) = Q_4$  және  $f(Q_4) = Q_1$  анықталады.

$f$  - биекция, барлық  $a \in M$  үшін  $f^4(a) = a$ ,  $f$  функциясы  $M$  бойынша оңға қарай монотонды екені анық.

$M$  саналымды категориялық әлсіз циклді минималды 2 дөңес құрылымды екенін дәлелдеуге болады.

**Мысал 4.2.6.**  $K_0(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$  болатындай  $M$   $Q_1, Q_2, Q_3$  және  $Q_4$  жиындарының бірігуінен тұратын  $M = \langle M, K, U_1^1, U_2^1, R^2 \rangle$  циклдік реттелген құрылым болсын. Әрбір  $Q_i$  рационал  $Q$  сандар ретінің көшірмесі;  $U_1(M) = Q_1 \cup Q_3$ ,  $U_2(M) = Q_2 \cup Q_4$ . Кез келген  $a \in Q_1$ ,  $b \in Q_3$  үшін  $R$  қатынасын  $M \models R(a, b) \Leftrightarrow K(a, b, a' + \sqrt{2})$  анықтасақ болады, мұндағы  $a' = f(a)$  және  $f$ - еркін тіркелген қатаң монотонды  $Q_1$  — ден  $Q_3$  ке биекция.

$f(x) := \text{rend}_R R(x, M) U_1(M)$  функциясы  $U_1(M)$  оңға монотонды болып табылатыны анық. Сондай-ақ  $M$  1 дәрежелі дөңес саналымды категориялық әлсіз циклдік минималды 2-дөңес құрылым екенін дәлелдеуге болады.

**Теорема 4.2.7.**  $T$  саналымды категориялық әлсіз циклдік минималды  $n$ -дөңес дерлік бинарлы дөңестік дәрежесі 1 болатын теориясы болсын,  $M \models T$ ,  $|M| = \aleph_0$ . Сонда келесідегілер орындалады:

(1)  $C := \text{acl}(\emptyset)$  ақырлы. Сонымен қатар, егер  $C \neq \emptyset$ , болса, онда  $k$  - ға

бөлінетін  $n$  және  $C = \{c_0, c_1, \dots, c_{k-1}\}$ ,  $K_0(c_0, c_1, \dots, c_{k-1})$  орындалатын және әрбір  $0 \leq j \leq k/n - 1$  үшін  $c_j, c_{j+k/n}, \dots, c_{j+k(n-1)/n}$  элементтері  $\emptyset$  бойынша бірдей типті қанағаттандырады, әрбір  $1 \leq j \leq k$  үшін, не  $M \models \neg \exists x K_0(c_{j-1}, x, c_j)$  немесе  $I_j = \{x \in M: M \models K_0(c_{j-1}, x, c_j)\}$  соңғы нүктелері жоқ тығыз реттелген жиын болады;

(2) әрбір  $1 \leq t \leq n$ , және  $K_0(U_1^{p_1}, \dots, U_1^{p_m}, U_2^{p_1}, \dots, U_2^{p_m}, \dots, U_n^{p_1}, \dots, U_n^{p_m})$  үшін  $U_t^{p_i}$  дөңес болатындай, әрбір  $1 \leq i \leq m$   $p_i(M) = \bigcup_{t=1}^n U_t^{p_i}$  үшін  $\emptyset$ -да  $m \geq 1$  алгебралық емес  $p_1, p_2, \dots, p_m$  1-типтер болады. Оның үстіне, кез келген  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $s < \omega$  және  $\langle a_1, \dots, a_s \rangle \in [\bigcup_{t=1}^m U_i^{p_t}]^s$  үшін

$$tp(\langle a_1, \dots, a_s \rangle / \emptyset) = tp(\langle b_1, \dots, b_s \rangle / \emptyset) \quad (4.31)$$

орындалатындай  $\langle b_1, \dots, b_s \rangle \in [\bigcup_{t=1}^m U_j^{p_t}]^s$  болады, яғни  $\bigcup_{t=1}^m U_j^{p_t}$  құрылымды  $\bigcup_{t=1}^m U_i^{p_t}$  құрылымға аударатын,  $M$  құрылымының автоморфизмі бар;

(3)  $E_1, E_2 \subseteq (\{s: 1 \leq s \leq mn\})^2$  эквиваленттілік қатынасы бар, мұнда  $\{U_s | s \leq mn\}$   $K_0(U_1, U_2, \dots, U_s)$  шартымен алгебралық емес 1-типтердің  $\emptyset$  да дөңес компоненттерін ерікті санау болып табылады, яғни

әрбір  $(i, j) \in E_1$  үшін бірегей  $\emptyset$ -анықталатын монотонды оң (немесе сол)  $f_{i,j}: U_i \rightarrow U_j$  биекциясы бар, сондықтан барлық  $(i, j), (j, k) \in E_1$  үшін  $f_{i,i} = id_{U_i}$  және  $f_{j,k} \circ f_{i,j} = f_{i,k}$  және кейбір  $l \leq n$  үшін  $f_{i,j}^l(a) = a$  барлық  $a \in U_i$

әрбір  $(i, j) \in E_2$  үшін бірегей  $\emptyset$  анықталатын формула  $R_{i,j}(x, y)$  бар сондықтан кез келгені  $a \in U_i$  үшін  $R_{i,j}(a, M) \subset U_j$ ,  $l \text{ end } R_{i,j}(a, M) = l \text{ end } U_j$ ,  $R_{i,j}(a, M)$  жиыны дөңес және ашық және  $g_{i,j}(x) := \text{rend } R_{i,j}(x, M)$   $U_i$  бойынша оңға (немесе солға) монотонды

әрбір  $(i, j) \in E_1$  үшін  $(i, j) \in E_2$  бар және

$$R_{i,j}(x, y) \equiv U^{p_l}(x) \wedge U^{p_r}(y) \wedge K(x, y, f_{i,j}(x)) \wedge y \neq f_{i,j}(x)$$

Мұнда кейбір  $l, k \leq m$  үшін  $U_i \subset U^{p_l}(M), U_j \subset U^{p_r}(M)$ .

сондықтан  $T$  кванторларды жоюға мүмкіндік береді

$$\{=, K^3\} \cup \{c_i: i \leq k-1\} \cup \{U^{p_l}(x): l \leq m\} \cup \{f_{i,j}: (i, j) \in E_1\}$$

$$\cup \{R_{i,j}(x, y): (i, j) \in E_2 \setminus E_1\}$$

мұнда  $U^{p_l}(x)$  әрбір  $l \leq m$  үшін  $p_l$  типін оқшаулайды.

Оның үстіне, (1)-(2)-дегідей ерекшеленген элементтері бар кез келген циклдік реттілік және  $E_1, E_2$  (3)-дегідей кез келген эквиваленттік қатынастар жоғарыдағыдай 1-дәрежелі дөңестік саналымды категориялық әлсіз циклдік минималды  $n$ -дөңес дерлік бинарлы теорияға сәйкес келеді.

4.2.7 теоремасын дәлелдеу. 1.  $T$  теориясының саналымды категориялығына сәйкес  $C$  жиыны ақырлы болады. Егер  $C \neq \emptyset$  болса, онда бос жиынның алгебралық тұйықталуында  $a \in M$  жатады. Демек,  $a \models p$  болатындай  $p \in S_1(\emptyset)$  алгебралық типі бар.  $M$   $n$ -дөңес болғандықтан,  $p(M)$  дәл  $n$  элементтен тұрады. Демек,  $C$  жиыны элементтердің ақырлы санынан тұрады және бұл сан  $n$ -ге еселі. Оны  $k$  арқылы белгілейміз.  $C$  келесідей тізімделсін:  $C = \{c_0, c_1, \dots, c_{k-1}\}$  және мұнда  $K_0(c_0, c_1, \dots, c_{k-1})$ . Сонда әрбір  $0 \leq j \leq k/2 - 1$  үшін  $c_j, c_{j+k/n}, c_{j+2k/n}, \dots, c_{j+k(n-1)/n}$  элементтері бос жиынның үстінде бірдей типті қанағаттандырады. Кейбір  $j: 1 \leq j \leq k$  үшін  $c_j$  элементінің тікелей мұрагері болса, онда  $M \models \neg \exists x K_0(c_{j-1}, x, c_j)$ . Егер  $c_{j-1}$   $c_j$  элементінің тікелей мұрагері болмаса, онда  $I_j = \{x \in M: M \models K_0(c_{j-1}, x, c_j)\}$  соңғы нүктелерсіз тығыз реттелген жиын екенін түсінеміз. Шынында да, егер  $I_j$  жиынында дискретті реттелген элементтер болса (яғни, кейбір элементтің тікелей мұрагері немесе тікелей алдыңғысы болады), онда әлсіз циклдік минималдылыққа байланысты мұндай элементтерден тұратын дөңес жиындардың шекті саны бар болар еді. Егер осы дөңес жиындардың біреуі шексіз болса, онда бұл жиынның кез келген элементінің анықталатын тұйықталуына шексіз болар еді, бұл  $T$ -тің саналымды категориясына қайшы келеді. Демек, бұл дөңес жиындардың әрқайсысы шекті болуы керек, бірақ онда бұл дөңес жиындардың барлық элементтері бос жиынның алгебралық тұйықталуында жатады, бұл  $c_{j-1}$  және  $c_j$  арасында  $C$  элементінің жоқтығына қайшы келеді.

2.  $T$  саналымды категориялық болғандықтан, бос жиында ақырлы толық 1-типтер бар. Демек,  $\emptyset$ -дан асатын алгебралық емес 1-типтердің де шектеулі саны бар және  $\emptyset$ -дан асатын барлық алгебралық 1-типтердің іске асырылу жиыны шекті болғандықтан, міндетті түрде кемінде бос жиында бір алгебралық емес 1-типте болуы керек. Теория  $n$ -дөңес болғандықтан,  $\emptyset$ -дан асатын әрбір алгебралық емес 1-типті іске асырылу жиыны шексіз және тығыз реттелген  $n$  дөңес құрамдастардан тұруы керек. Қалғаны  $n$ -дөңес құрылымдардың симметриялы құрылымынан туындайды. Керісінше делік: кейбір  $i, j \leq n$ - үшін  $M$  - де  $\bigcup_{t=1}^m U_j^{p_t} \cup_{t=1}^m U_i^{p_t}$  айналдыратын автоморфизмі болмайды. Сондықтан, кез келген  $\langle b_1, \dots, b_s \rangle \in [\bigcup_{t=1}^m U_j^{p_t}]^s$   $tp(\langle a_1, \dots, a_s \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle b_1, \dots, b_s \rangle / \emptyset)$  үшін  $s < \omega$  және  $\langle a_1, \dots, a_s \rangle \in [\bigcup_{t=1}^m U_i^{p_t}]^s$  болады, мұнда  $\phi(a_1, \dots, a_s) \wedge \neg \phi(b_1, \dots, b_s)$  болатындай  $\emptyset$ -анықталатын  $\phi(x_1, \dots, x_s)$  формуласы шығады. Жалпы, кейбір  $t' \leq m$  үшін  $\langle a_1, a_2, \dots, a_{s'} \rangle \in [U_i^{p_{t'}}]^{s'}$  қосалқы қосылғышы болсын делік. Содан кейін келесі формуланы қарастырамыз:

$$\phi'(x_1, \dots, x_{s'}):= \exists y_{s'+1}, \dots, \exists y_s \phi(x_1, \dots, x_{s'}, y_{s'+1}, \dots, y_s) \quad (4.32)$$

Яғни  $M \models \phi'(a_1, \dots, a_{s'}) \wedge \neg \phi'(b_1, \dots, b_{s'})$  екені анық. Сонда,  $U_i^{p_{t'}}$  мен  $U_j^{p_{t'}}$  дөңес құрамдас бөліктер  $\emptyset$ -анықталатын формуламен бөлінеді, бұл  $p_{t'}$  типін  $n$ -дөңестігіне қайшы.

3. Екі ерікті дөңес  $U_i$  және  $U_j$  құраушыларын қарастырсақ. Егер  $dcl(\{a\}) \cap$

$U_j \neq \emptyset$  орындалатындай  $a \in U_i$  бар болса, онда  $\emptyset$ -де анықталатын  $U_i$ -дан  $U_j$  биекция болады. Мұндай биекцияның бірегей екенін түсінейік. Керісінше:  $f \neq g$  болатындай  $U_i$  ды  $U_j$  да көрсететін  $\emptyset$  анықталатын биекция бар десек.  $f \neq g$  болғандықтан,  $f(a) \neq g(a)$  болатындай  $a \in U_i$  элементі бар. Белгілі болу үшін кейбір  $b_1, b_2 \in U_j$  үшін  $f(a) = b_1, g(a) = b_2$  болсын. Сонда  $b_1, b_2 \in dcl(\{a\}) \setminus dcl(\emptyset)$ , осыдан, алгебралық тұйықталуды ауыстыру леммасы арқылы  $b_2 \in dcl(\{b_1\})$  аламыз. Осы жерден  $dcl(\{b_1\})$  шексіз екенін дәлелдей аламыз ол  $T$  саналымды категориялығына қайшы келеді. Мұндай биекцияның оңға (немесе солға) монотондылығы теорияның дөңестік дәрежесі 1 болуымен қамтамасыз етіледі. Егер  $i = j$  болса, онда ол бірдей биекция болады (әйтпесе, бұрын дәлелденгенмен,  $U_i$  элементінің анықталатын тұйықталуы шексіз).

Әрине, егер  $f_{i,j}: U_i \rightarrow U_j$  және  $f_{j,k}: U_j \rightarrow U_k$  биекциялары бар болса, онда  $f_{i,k} = f_{j,k} \circ f_{i,j}$  -  $U_i$  бойынша  $U_k$  биекция болады, ал  $E_1$  қажетті эквиваленттік қатынас болады.

Енді кез келген  $a \in U_i$   $dcl(\{a\}) \cap U_j = \emptyset$  үшін,  $a \in U_i, b_1, b_2 \in U_j$  және  $M \models F(a, b_1) \wedge \neg F(a, b_2)$  болатындай  $\emptyset$ -анықталатын  $F(x, y)$  формуласы бар делік. Сонда кез келген  $a \in U_i$   $R_{i,j}(a, M) \subset U_j$ ,  $lend R_{i,j}(a, M) = lend U_j$ ,  $R_{i,j}(a, M)$  үшін  $R_{i,j}(x, y)$  ашық және дөңес формуласын құру оңай.  $g_{i,j}(x) := rend R_{i,j}(x, M)$  функциясы  $U_i$  қатаң монотонды. Мұндай формуланың  $R_{i,j}(x, y)$  бірегей екенін ашайық. Керісінше алсақ:  $\emptyset$  анықталатын  $R'_{i,j}(x, y)$  және  $R_{i,j}(x, y)$  формулалардада және белгілі болу үшін кейбір  $a \in U_i$   $R_{i,j}(a, M) \subset R'_{i,j}(a, M)$  формулалардада қажетті қасиеттері бар делік.

$$M \models K_0(a, b, b') \wedge R_{i,j}(a, b) \wedge \neg R'_{i,j}(a, b) \wedge R'_{i,j}(a, b') \quad (4.33)$$

болатындай  $b, b' \in U_j$  бар. Келесі формуланы қарастырсақ:

$$\Phi(x, b') := U^{pr}(x) \wedge \exists t \exists z [U^{pl}(t) \wedge \neg R'(t, b') \wedge R(t, z) \wedge K(b', x, z)] \quad (4.34)$$

мұнда  $U_i \subset U^{pl}(M)$  және кейбір  $l, r \leq m$  үшін  $U_j \subset U^{pr}(M)$ .

$\Phi(x, y)$  —  $p_r$  тұрақты оң жақ дөңес формула екенін түсіну оңай.

$E_2$  эквиваленттік қатынас екенін дәлелдеп көрейік.  $1 \leq i \leq s$  шартымен  $i < \omega$  еріктісін алайық. Сонда  $U_i \subset U^{pl}(M)$  болатындай  $l \leq m$  бар. Келесі формуланы қарастырсақ:

$$R_{i,i}(x, y) := U^{pl}(x) \wedge U^{pl}(y) \wedge \forall t [K(y, t, x) \rightarrow U^{pl}(t)] \wedge y \neq x$$

Сонда кез келген  $a \in U_i$   $R_{i,i}(a, M) \subset U_i$ ,  $lend R_{i,i}(a, M) = lend U_i$  үшін  $R_{i,i}(a, M)$  дөңес және ашық және  $g_{i,i}(x) := rend R_{i,i}(x, M)$   $U_i$  бойынша оңға қарай монотонды, яғни,  $(i, i) \in E_2$ .

$(i, j) \in E_2$  болсын (мұнда  $U_i \subset U^{pl}(M)$  және  $U_j \subset U^{pr}(M)$  кейбір  $l, r \leq m$  үшін) және  $R_{i,j}(x, y)$  қажетті қасиеттері бар  $\emptyset$ -анықталатын формула болып

табылады . Егер  $g_{i,j}(x) := \text{rend} R_{i,j}(x, M)$  функция  $U_i$  бойынша оңға монотонды болса, онда

$$R_{j,i}(x, y) \equiv U^{pr}(x) \wedge U^{pl}(y) \wedge \neg R_{i,j}(y, x) \quad (4.34)$$

Егер  $g_{i,j}(x) := \text{rend} R_{i,j}(x, M)$  функциясы  $U_i$  бойынша солға монотонды болса онда

$$R_{j,i}(x, y) \equiv U^{pr}(x) \wedge U^{pl}(y) \wedge R_{i,j}(y, x) \quad (4.35)$$

Сондықтан,  $(j, i) \in E_2$ .

$(i, j), (j, k) \in E_2$  бар есептейік, мұнда  $U_i \subset U^{pl}(M)$ ,  $U_j \subset U^{pr}(M)$  және  $U_k \subset U^{ptl}, r, t \leq m$ . Сонда  $\emptyset$  - анықталатын  $R_{i,j}(x, y)$  және  $R_{j,k}(x, y)$  қажетті қасиеттері бар формулалары болады. Егер  $g_{j,k}$  функция оңға қарай  $U_j$  бойынша монотонды болса, онда

$$R_{i,k}(x, y) \equiv U^{pl}(x) \wedge U^{pr}(y) \wedge \exists z [U^{pt}(z) \wedge R_{i,j}(x, z) \wedge R_{j,k}(z, y)] \quad (4.36)$$

және  $g_{i,k}$  функциялары  $U_i$  бойынша оң-монотонды немесе сол-монотонды. Егер  $g_{j,k}$  функциясы солға монотонды  $U_j$  бойынша болса, онда

$$R_{i,k}(x, y) \equiv U^{pl}(x) \wedge U^{pr}(y) \wedge \exists z [U^{pt}(z) \wedge \neg R_{i,j}(x, z) \wedge R_{j,k}(z, y)] \quad (4.37)$$

$T$  кванторларды жоюға жол беретінін тексеру ғана қалады.  $M$  элементтерінің кез келген  $l$  -кортежінің  $\langle a_1, \dots, a_l \rangle$  толық түрі  $x = y$ ,  $K(x, y, z) U^{pr}(x)$ ,  $y = f_{i,j}(x)$ ,  $R_{i,j}(x, y)$  түріндегі формулалардың барлық тұжырымдары мен болымсыз тұжырымдарының байланысуынан тұратын  $\Psi$  формуласымен анықталатынын дәлелдейміз,  $\langle a_1, \dots, a_l \rangle$  кортеж координатасында орны бар.

Жағдай  $l = 1$ . Анық.

Жағдай  $l = 2$ . Келесі жағдайлар болуы мүмкін:

Жағдай 2а.  $a_1, a_2 \in C$ . Сонда  $\Psi(x, y) := x = a_1 \wedge y = a_2$  формуласы  $\langle a_1, a_2 \rangle$  кортежінің типін анықтайды.

Жағдай 2б.

$a_1 \in C$ ,  $a_2 \in U_i$  үшін  $M$  элементтерінің кез келген  $l$  -кортежінің  $\langle a_1, \dots, a_l \rangle$  толық типі формулалардың барлық тұжырымдары мен болымсыз тұжырымдарының жалғауынан тұратын  $x = y$ ,  $K(x, y, z)$ ,  $U^{pr}(x)$ ,  $y = f_{i,j}(x)$ ,  $R_{i,j}(x, y)$  типіндегі  $\Psi$  формуласымен анықталатынын дәлелдейміз, мұнда кейбір  $i \leq s$   $\langle a_1, \dots, a_l \rangle$  кортеж координатасында орналасқан. Сонда  $U_i \subset U^{pl}(M)$  болатындай  $U_i \subset U^{pl}(M)$  бар, демек,  $U_i \subset U^{pl}(M)$  формуласы  $\langle a_1, a_2 \rangle$  кортеж типін анықтайды.

Жағдай 2с. Кейбір  $j \leq m$  үшін  $a_1, a_2 \in p_j(M)$  бар.

$p_j(M) = \bigcup_{t=1}^n U_t^{p_j}$  болғандықтан, онда бұл нүктелерді  $p_j$  типте

орналастыруға  $\lfloor n/2+1 \rfloor$  жағдайлары бар. ( $\lfloor x \rfloor$   $x$  -тен аспайтын ең үлкен бүтін санды білдіреді):

(1)  $a_1, a_2$   $p_j$  типті бір дөңес компонентте жатады.

(2)  $a_1, a_2$   $p_j$  типіндегі әр түрлі дөңес құрамдас бөліктерде жатады және осы құрамдас бөліктер арасында (солдан оңға қарай)  $p_j$  типті басқа дөңес компонент болмайды.

( $\lfloor n/2 + 1 \rfloor$ )  $a_1, a_2$   $p_j$  типінде әр түрлі дөңес компоненттерде жатыр және осы компоненттер арасында (солдан оңға қарай)  $p_j$  типті дәл  $\lfloor n/2 \rfloor$  басқа дөңес компоненттер бар.

Осы нүктелерді орналастыру жағдайларының әрқайсысы  $\emptyset$  анықталатын формуламен сипатталады: мысалы, (1)  $\phi_0(x, y) := \forall u[K(x, u, y) \rightarrow U^{p_j}(u)]$ , (2) жағдай келесі формуламен сипатталады :

$$\phi_1(x, y) := \exists u_1(K(x, u_1, y) \wedge \neg U^{p_j}(u_1)) \wedge \forall u[K(x, u, u_1) \wedge U^{p_j}(u) \rightarrow$$

$$\forall t(K(x, t, u) \rightarrow U^{p_j}(t))]$$

$$\wedge \forall u'[K(u_1, u', y) \wedge U^{p_j}(u') \rightarrow \forall t'(K(u', t', y) \rightarrow U^{p_j}(t')))] \quad (4.38)$$

Егер (1) орындалса, онда  $\Psi(x, y) := U^{p_j}(x) \wedge U^{p_j}(y) \wedge \phi_0(x, y)$  формуласы  $\langle a_1, a_2 \rangle$  кортеж типін анықтайтынын айтамыз. Егер олай болмаса, онда  $p_j$  тұрақты оңға дөңес формуланы құру оңай. 2.4 Қорытындысына қайшы.

Енді (2) орындалады деп есептейік. Сонда кейбір  $i_1, i_2 \leq n$  үшін  $a_1 \in U_{i_1}^{p_j}$  және  $a_2 \in U_{i_2}^{p_j}$ , яғни:

(A)  $\emptyset$ -анықталатын қатаң монотонды биекция бар  $f: U_{i_1}^{p_j} \rightarrow U_{i_2}^{p_j}$ .

(B)  $\neg(A)$  және  $\emptyset$  - анықталатын  $R(x, y)$  формуласы бар және  $a \in U_{i_1}^{p_j}$   $R(a, M) \subset U_{i_2}^{p_j}$ ,  $\text{lend } R(a, M) = \text{lend } U_{i_2}^{p_j}$  әрқайсысы үшін  $R(a, M)$  дөңес және ашық болады, және  $g(x) := \text{rend } R(x, M)$   $U_{i_1}^{p_j}$  бойынша қатаң монотонды.

(C)  $\neg(A)$  және  $\neg(B)$ .

(A) орындалады деп есептесек. Сонда не  $f(a_1) = a_2$ , немесе  $K_0(a_1, f(a_1), a_2)$ , немесе  $K_0(a_1, a_2, f(a_1))$ . Егер болса  $f(a_1) = a_2$ , онда келесі формула

$$\Psi(x, y) := U^{p_j}(x) \wedge U^{p_j}(y) \wedge \phi_1(x, y) \wedge f(x) = y \quad (4.39)$$

кортеж  $\langle a_1, a_2 \rangle$  түрін анықтайды. Егер болса  $K_0(a_1, f(a_1), a_2)$ , онда

$$\Psi(x, y) := U^{p_j}(x) \wedge U^{p_j}(y) \wedge \phi_1(x, y) \wedge K_0(x, f(x), y) \quad (4.40)$$

Формуласы  $\langle a_1, a_2 \rangle$  кортеж типін анықтайды. Егер олай болмаса, онда

$\Psi(a_1, a'_2)$  болатындай  $a'_2 \in U_{i_2}^{p_j}$  болады және  $\emptyset$ - анықталатын  $M \models \theta(a_1, a_2) \wedge \neg\theta(a_1, a'_2)$  болатындай  $\theta(x, y)$  формуласы бар.  $K_0(a_1, a_2, a'_2)$  анықтық үшін.  $\theta(a_1, M)$  әлсіз циклдік минималдылықтың арқасында дөңес жиындардың шекті санының бірігуі болады.  $\theta'(a_1, M) - \{a_1\}$ -анықталатын құрамында  $a_2$  бар дөңес жиын болсын. Сонда келесі формуланы қарастырсақ:

$$\Phi(x, a) := U^{p_j}(x) \wedge \exists t \exists z [f(t) = a \wedge \theta'(t, z) \wedge K(a, x, z)] \quad (4.41)$$

мұнда  $a = f(a_1)$ .  $\Phi(x, y)$ —  $p_j$  оң жақ дөңес формула. Қарама-қайшылық.

Енді (B) орындалды деп есептейік. Сонда не  $R(a_1, a_2)$ , немесе  $\neg R(a_1, a_2)$ . Соным, біріншіні алайық. Сонда

$$\Psi(x, y) := U^{p_j}(x) \wedge U^{p_j}(y) \wedge \phi_1(x, y) \wedge R(x, y) \quad (4.42)$$

$\langle a_1, a_2 \rangle$  кортеж типін анықтайды. Егер олай болмаса,  $\Psi(a_1, a'_2)$  болатындай  $a'_2 \in U_{i_2}^{p_j}$  орындалады,  $M \models R'(a_1, a_2) \wedge \neg R'(a_1, a'_2)$  и  $R'(a_1, M)$  дөңес болатындай  $\emptyset$  анықталатын  $R'(x, y)$  формуласы бар.  $K_0(a_1, a_2, a'_2)$  анықталуға осылай болсын.  $f'(x) := \text{rend } R'(x, M)$  функциясы  $p_j(M)$  да қатаң монотонды. Сонда келесі формуланы қарастырсақ:

$$\Phi(x, a'_2) := U^{p_j}(x) \wedge \exists t \exists z [\neg R'(t, a'_2) \wedge R(t, z) \wedge K(a'_2, x, z)] \quad (4.43)$$

$\Phi(x, y)$ —  $p_j$  тұрақты оң жақ дөңес формула екенін түсіну оңай. Қорытындыға қайшы келеді.

Егер (C) орындалса, онда  $\Psi(x, y) := U^{p_j}(x) \wedge U^{p_j}(y) \wedge \phi_1(x, y)$  формуласы  $\langle a_1, a_2 \rangle$  кортежінің типін анықтайды. Егер олай болмаса, онда (B) сияқты  $\emptyset$ -анықталатын  $R(x, y)$  формуласы болады, бұл болжамға қайшы келеді.

$p_j$  типті дөңес құрамдастарға қатысты  $a_1$  және  $a_2$  нүктелерінің орналасуының басқа жағдайлары ұқсас қарастырылады.

2d Жағдай.  $a_1 \in p_l(M)$ ,  $a_2 \in p_r(M)$  кейбір  $l, r \leq m$  үшін,  $l \neq r$ . Бұл жағдай 2с жағдайына ұқсас кейбір шамалы өзгерістермен қарастырылады. Осылайша  $l = 2$  толығымен қаралады.

Жалпы жағдай.  $l = 2$  жағдайына сәйкес кортеж элементтерінің  $\langle a_1, \dots, a_l \rangle$  кез келген жұбы үшін  $\emptyset$ -анықталатын  $\langle a_i, a_j \rangle$  кортежінің толық типін анықтайтын  $\Psi_{i,j}(x, y)$  формуласы болады.  $T$  теориясы бинарлы дерлік болғандықтан,

$$\Psi(x_1, \dots, x_l) := \bigwedge_{1 \leq i, j \leq l} \Psi_{i,j}(x_i, x_j) \text{ формуласы}$$

$\langle a_1, \dots, a_l \rangle$  кортежінің толық типін анықтайды. Теорема дәлелденді.

## 5 САНАЛЫМДЫ КАТЕГОРИЯЛЫҚ ӘЛСІЗ ЦИКЛДІК МИНИМАЛДЫ ҚҰРЫЛЫМДАРДЫҢ ДЕРЛІК БИНАРЛЫЛЫҒЫ ТУРАЛЫ

### 5.1. Типтерді іске асыру жиынында функцияның әрекеті

$\phi(x, \bar{y})$  ерікті  $L$ -формуласы болсын,  $\bar{b} \in M$ .  $\phi(M, \bar{b})$  дөңес,  $|\phi(M, \bar{b})| > 1$  және  $|M \setminus \phi(M, \bar{b})| > 1$  болсын делік. Егер

$$M \models \exists z_1 \exists z_2 [K_0(z_1, a, z_2) \wedge \forall t_1 (K(z_1, t_1, a) \wedge t_1 \neq a \rightarrow \neg \phi(t_1, \bar{b})) \wedge \wedge \forall t_2 (K(a, t_2, z_2) \wedge t_2 \neq a \rightarrow \phi(t_2, \bar{b}))] \quad (5.1)$$

орындалса,  $a \in M$  элементі  $\phi(M, \bar{b})$  жиынының сол жақ шеткі нүктесі болады.

Оң жақ шеткі нүкте түсінігі де дәл осылай анықталады.  $M$  циклдік минималды құрылымда кез келген  $\phi(M, \bar{b})$  дөңес жиынының екі шеткі нүктесі де болатынын ескерсек. Әлсіз циклдік минималды құрылым жағдайында анықталатын дөңес жиынының кемінде бір соңғы нүктесі болмауы мүмкін.

**Мысал 5.1.1.**  $M = \langle \mathbb{Q} \cup \omega, < \rangle$  - сызықты реттелген құрылым болсын, мұнда  $\mathbb{Q}$  – рационал сандар реті,  $\omega$  – натурал сандар реті,  $\mathbb{Q} < \omega$  болатындай, яғни кез келген  $a \in \mathbb{Q}$  және  $b \in \omega$  үшін  $a < b$  болады. Осы құрылымдағы сызықтық ретін 4.1.1 теорема бойынша циклдік ретпен ауыстырайық, яғни  $M^* := \langle \mathbb{Q} \cup \omega, K \rangle$  қарастырайық.  $M^*$  — циклдік минималды емес, әлсіз циклдік минималды құрылым екенін анықтауға болады. Келесі формуланы қарастырсақ:

$$\phi(x) := \forall y \forall z [K_0(y, x, z) \rightarrow \exists y_1 \exists z_1 (K_0(y, y_1, x) \wedge K_0(x, z_1, z))]. \quad (5.2)$$

$\phi(M)$   $M^*$  - де сол жақ шеткі нүктесі жоқ дөңес жиын екені анық.

$p \in S_1(\emptyset)$  және  $p \in S_1(\emptyset)$  әрбір  $b \in p(M)$ ,  $F(M, b) \subset p(M)$  үшін  $F(M, b)$  дөңес шексіз жиын болатындай  $L$  - формула болсын.  $M$ ).  $F^l(y)$  формуласы  $F(M, y)$  жиынының сол жақ шеткі нүктесі екенін көрсететін формула болсын:

$$\exists z_1 \exists z_2 [K_0(z_1, y, z_2) \wedge \forall t_1 (K(z_1, t_1, y) \wedge t_1 \neq y \rightarrow \neg F(t_1, y)) \wedge \wedge \forall t_2 (K(y, t_2, z_2) \wedge t_2 \neq y \rightarrow F(t_2, y))]. \quad (5.3)$$

Кез келген  $b \in p(M)$  үшін  $F(x, y)$   $p$  - сақтайтын оң дөңес болады деп айтамыз.

$$M \models \forall x [F(x, b) \rightarrow F^l(b) \wedge \forall z (K(b, z, x) \rightarrow F(z, b))] \quad (5.4)$$

Сонымен қатар  $\neg F(a, b)$  және  $K_0(b, M, a) \subseteq p(M)$  болатындай  $a \in p(M)$  болады.

**Мысал 5.1.2.** [14]  $M = \langle M, K, E \rangle$  тығыз циклдік реттелген құрылым болсын,  $E(x, y)$  эквиваленттік қатынас  $M$  - ді  $E$  -классының шекті санына

бөледі, әрбір  $E$  -классы дөңес, ашық және  $M$  -де соңғы нүктелері жоқ.  $M$  1-транзитивті әлсіз циклді минималды құрылым екенін анықтауға болады. Келесі формуланы қарастырсақ:

$$(x, y) := E(x, y) \wedge \forall z [\neg E(z, y) \rightarrow K(y, x, z)]. \quad (5.5)$$

$R(x, y)$   $p$  - сақтайтын оң жақ дөңес екенін көру оңай, мұнда  $p \in S_1(\emptyset)$   $\emptyset$  бойынша жалғыз 1-тип. Мұнда  $R(M, b)$  дөңес және кез келген  $b \in p(M)$  үшін  $b$  сол жақ шеткі нүктесі болады.  $E(x, y)$  формуласы  $p$  - сақтайтын оң дөңес емес, себебі  $E(M, b)$  соңғы нүктелері жоқ.

Бұдан әрі бізге [14] енгізілген циклдік реттелген құрылымның анықталатын аяқталуы туралы түсінік қажет. Оның сызықтық аналогы [8] енгізілген. Циклдік реттелген  $M$  құрылымындағы  $C(x)$  қимасы  $K(a, x, b)$  түріндегі формулалардың максималды сәйкес жиыны, мұндағы  $a, b \in M$ . Егер қиманы жүзеге асыратын  $c \in M$  бар болса, қима алгебралық болып табылады. Кері жағдайда, мұндай қима алгебралық емес деп аталады.  $C(x)$  алгебралық емес қима болсын. Егер барлық  $b \in M$  үшін  $K(a, x, b) \in C(x)$  формуласы немесе барлық  $b \in M$  үшін  $K(b, x, a) \in C(x)$  формуласы болатындай  $a \in M$  бар болса, онда  $C(x)$  рационал болады. Ондай болмаған жағдайда, мұндай қима иррационалдық деп аталады.  $M$  - де  $C(x)$  қимасы  $\{c \in M | K(a, c, b) \text{ және } K(a, x, c) \in C(x)\}$  жиындары анықталатындай  $a, b \in M$  болса  $C(x)$  қимасы анықталатын қима деп аталады.  $M$  құрылымының  $\overline{M}$  анықталатын толықтауышы  $M$  -дегі иррационал болып табылатын барлық анықталатын қималармен бірге  $M$  -нен тұрады (негізінен  $\overline{M}$   $M$  - ның анықталатын ішкі жиындарының соңғы нүктелерінен тұрады).  $K$  циклдік реті  $\overline{M}$  - ге дейін келесідегідей кеңейтіледі:

$C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x), C_3 = C_3(x)$   $M$  - де ерікті түрде анықталатын иррационал қималар болсын. Егер  $K(a, x, b) \in C_1(x)$  болса  $a \neq b$  шартымен кез келген  $a, b \in M$  үшін  $K_0(a, C_1, b)$  деп орындалады.  $b \in M$  үшін  $b \neq a, K_0(b, C_1, a)$  және  $K_0(a, C_2, b)$  болатындай кез келген  $a \in M$  үшін  $K_0(C_1, a, C_2)$ , жазамыз.  $K_0(a, b, c), K_0(a, C_1, b), K_0(b, C_2, c)$  және  $K_0(c, C_3, a)$  болатындай  $a, b, c \in M$  бар болса,  $K_0(C_1, C_2, C_3)$  деп жазамыз.

$F_1(x, y), F_2(x, y)$  еркін  $p$  - сақтаушы оң жақ дөңес формулалары болсын.  $F_1(M, a) \subset F_2(M, a)$  болатындай  $a \in p(M)$  бар болса,  $F_2(x, y)$   $F_1(x, y)$  мәнінен үлкен деп айтамыз. Бұл барлық  $p$  -ті сақтайтын оң дөңес формулалардың  $F(x, y)$  жиынында сызықтық тәртіпті береді (теориядағы  $Th(M)$  эквивалентіне дейін).  $f(y) := \text{rend } F(M, y)$  жазамыз, яғни  $f(y) \in F(M, y)$  жиынының оң жақ шеткі нүктесі, ол  $M$  құрылымының  $\overline{M}$  анықталатын аяқталуында жатыр. Сонда  $f$  -  $p(M)$  мәнін  $\overline{M}$ -ге салыстыратын функция. Сол сияқты, біз  $p$ -сақталған сол жақ дөңес формулаларды қарастырамыз және  $f(y) := \text{lend } F(M, y)$  жазамыз, яғни  $f(y) \in F(M, y)$ , жиынының сол жақ шеткі нүктесі болып табылады, ол сонымен қатар  $M$  құрылымының  $\overline{M}$  анықталатын толықтауында жатыр.  $F(x, y)$   $p$  -ті сақтайтын оң дөңес формула болсын. [16] анықтамасын ықшамдай

отырып, егер кез келген  $\alpha, \beta \in p(M)$  үшін  $M \models F(\beta, \alpha)$  шығатындай

$$M \models \forall x (K(\beta, x, \alpha) \wedge x \neq \alpha \rightarrow [F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta)]) \quad (5.6)$$

орындалса,  $F(x, y)$  эквивалент тудырушы болады.

**Лемма 5.1.3.** [67]  $M \aleph_0$ -категориялық 1-транзитивті емес әлсіз циклдік минималды құрылым болсын,  $p \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес. Сонда кез келген  $p$ -сақтайтын оң (сол) дөңес формуласы эквивалентті тудыратын формула болып табылады.

$f \in \overline{M}$ -де  $Dom(f) = I \subseteq M$  болатын біртұтас функция болсын, мұнда  $I$  ашық дөңес жиын.  $f \in I$  бойынша оң (сол жақ) монотонды деп айтамыз, егер ол  $K_0$  қатынасын сақтаса (кері), яғни  $K_0(a, b, c)$  болатындай кез келген  $a, b, c \in I$  үшін  $K_0(f(a), f(b), f(c))$  ( $K_0(f(c), f(b), f(a))$ ) бар.

$f \in \overline{M}$ -де  $Dom(f) = I \subseteq M$  болатын біртұтас функция болсын, мұнда  $I$  ашық дөңес жиын.  $f \in I$  бойынша локалды оң монотонды (локалды сол монотонды, локалды тұрақты), егер барлық  $x \in I$  үшін ашық дөңес  $J \subseteq I$  жиыны болса,  $x \in J$  және  $f$  оң монотонды (сол жақта монотонды, тұрақты) деп айтамыз.

**Факт 5.1.5.**  $M \aleph_0$ -категориялық 1-транзитивті емес әлсіз циклдік минималды құрылым болсын,  $p \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес. Сонда анықталу облысы  $p(M)$  болатын кез келген  $\emptyset$ -анықталатын  $f$  функциясы  $p(M)$  бойынша жергілікті монотонды немесе жергілікті тұрақты болады.

**Анықтама 5.1.6.**  $M$  әлсіз циклдік минималды құрылым болсын,  $A \subseteq M$ ,  $M \aleph_0 + |A|^+$ -қаныққан,  $p_1, p_2 \in S_1(A)$  алгебралық емес.  $\beta_1 \in H(\alpha, M)$  и  $\beta_2 \notin H(\alpha, M)$  орындалатындай  $H(x, y)$ ,  $\alpha \in p_1(M)$  және  $\beta_1, \beta_2 \in p_2(M)$   $L_A$  формуласы бар болса,  $p_1$  типі  $p_2$  типіне ( $p_1 \not\leq^w p_2$ ) әлсіз ортогональды емес деп айтамыз.

**Лемма 5.1.7.**  $T \aleph_0$ -категориялық  $m$ -дөңес әлсіз циклдік минималды теория болсын,  $m > 1$ ,  $M \models T$ ,  $p \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес, ал  $\{U_1, U_2, \dots, U_m\}$  —  $p$  типінің дөңес компоненттері болсын.  $E(x, y)$   $\emptyset$ -анықталатын, кейбір  $1 \leq i \leq m$  үшін  $U_i$  дөңес кластарға бөлетін эквиваленттік қатынас болып табылады, осылайша кемінде екі  $E$ -класс болады. Сонда  $E$ -классындағы индукцияланған соңғы нүктелері жоқ циклдік реттілік-тығыз реттілік болып табылады және  $f(y) := \text{rend}_R E(M, yE)$   $p(M)$  бойынша локалды тұрақты, сондықтан  $f \in p(M)/E$  бойынша монотонды оңға болады.

Лемма 5.1.7 дәлелдеу.  $p$  типін оқшаулайтын  $U(x)$   $L$ -формуласы болсын және мына төмендегі өрнек орындалсын

$$x \triangleleft y := U(x) \wedge U(y) \wedge \forall t [K(x, t, y) \rightarrow U(t)]. \quad (5.7)$$

Әрине,  $\triangleleft$  қатынасы  $p$  типіндегі әрбір дөңес құрамдас бөлікте сызықтық тәртіпті анықтайды. Болжам бойынша,  $\neg E(a, b)$  болатындай  $a, b \in U_i$  бар. Алдымен  $U_i$  құрамында бар сол жақ соңғы  $E$ -класс жоқ екенін көрсетеміз. Керісінше делік:  $E(M, a) \cap U_i$  — ның ішіндегі соңғы сол жақ класс болып

табылатындай  $a \in U_i$  бар.

Келесі формуланы қарастырсақ:

$$\phi(x) := U(x) \wedge \forall y[y \triangleleft x \rightarrow E(x, y)]. \quad (5.8)$$

$\phi(x)$  формуласы  $p(M)$  бойынша  $p$  типті барлық дөңес компоненттердің сол жақ  $E$  -класстарын анықтайды. Сонда  $\emptyset \neq \phi(M) \subset U(M)$ , бұл  $U(x)$  формуласының  $\emptyset$  бойынша толықтығына қайшы келеді. Біз сондай-ақ  $U_i$  ішінде ең оң жақ  $E$ -классының жоқ екенін көрсете аламыз. Осылайша  $E$   $U_i$  (демек,  $p$  типінің әрбір дөңес құрамдас бөлігі) шексіз класстарға бөледі. Әрбір  $E$  -классы ашық және  $M$  -де соңғы нүктелері жоқ екені анық, өйткені  $E$  -класстарының соңғы нүктелерінің бос емес жиыны  $\emptyset$ -анықталатын болады, сонымен қатар  $U(x)$  формуласының  $\emptyset$ -дан асатын толықтығына қайшы келеді. Енді келесі формуланы қарастырамыз:

$$\Phi(x) := U(x) \wedge \exists z[\neg E(z, x) \wedge U(z) \wedge \forall t(K_0(x, t, z) \wedge U(t) \rightarrow E(x, t) \vee E(z, t))].$$

Егер  $\Phi(x) \notin p$  болса, онда  $E$  - класстары тығыз реттелген. Егер  $\Phi(x) \in p$  болса, онда  $E$  - класстары дискретті реттелген, бұл  $T$  теориясының  $\aleph_0$  - категориялық сипатына қайшы келеді.

$A, B, C$  циклдік реттелген  $M$  құрылымының жұптастырылған ішкі жиындары болсын,  $A$  және  $B$  дөңес.  $K_0(A, c, B)$  болатындай  $c \in C$  бар болса,  $A$  және  $B$   $C$  - бөлінетін деп айтамыз.

**Теорема 5.1.8.**  $T$   $\aleph_0$ -категориялық  $m$  -дөңес әлсіз циклдік минималды теория,  $m > 1$ ,  $M \models T$ ,  $p \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес,  $\{U_1, U_2, \dots, U_m\}$  -  $p$  типінің дөңес құрамдас бөліктері,  $f$  -  $\emptyset$ -анықталатын сұрыптаудағы  $\emptyset$ -анықталатын функция, сондықтан  $U_i \subseteq \text{Dom}(f)$  және  $f$  кейбір  $1 \leq i \leq m$  үшін  $U_i$  бойынша тұрақты емес. Сонда  $p(M) \subseteq \text{Dom}(f)$  және  $p$  типті әрбір дөңес компонентті дөңес кластардың шексіз санына бөлетін  $\emptyset$ -анықталатын  $E(x, y)$  эквиваленттілік қатынасы болады, сондықтан  $f$   $p(M)/E$  бойынша қатаң монотонды болады.

Теорема 5.1.8 дәлелдеу. Егер  $f$   $U_i$  бойынша қатаң монотонды болса, онда  $E(x, y) := x = y$  және дәлелдеудің қажеті жоқ. Енді  $f$   $U_i$  бойынша қатаң монотонды емес деп есептейік.  $U_i$  жиынының 1-ажыратылмауының арқасында  $f$  өзінің  $U_i$  бойынша әрекетін өзгертпейді, сондықтан не  $f$  локалды тұрақты, не  $f$   $U_i$  бойынша жергілікті монотонды.  $U(x)$   $p$  типін оқшаулайтын L-формула болсын және 5.1.7 Леммадағыдай,

$$x \triangleleft y := U(x) \wedge U(y) \wedge \forall t[K(x, t, y) \rightarrow U(t)]. \quad (5.10)$$

Жағдай 1.  $f$   $U_i$  бойынша жергілікті тұрақты болып табылады.

Келесі формуланы қарастырсақ:

$$E(x, y) := U(x) \wedge U(y) \wedge f(x) = f(y) \wedge \quad (5.11)$$

$$[x \triangleleft y \rightarrow \forall t(K_0(x, t, y) \rightarrow f(t) = f(x))] \wedge [y \triangleleft x \rightarrow \forall t(K_0(y, t, x) \rightarrow f(t) = f(x))].$$

$E(x, y)$   $U_i$  дөңес кластарға бөлетін эквиваленттік қатынас екені анық, сондықтан әрбір  $E$  класындағы  $f$  функциясы тұрақты болады.  $f$   $U_i$  бойынша тұрақты емес болғандықтан,  $U_i$  ішінде кемінде екі  $E$  -класс бар. Сонда, Лемма 5.1.7 бойынша  $E$   $p$  типінің әрбір дөңес компонентасын шексіз дөңес кластардың шексіз санына ыдыратады.  $a \triangleleft b$ ,  $\neg E(a, b)$  және  $f(a) = f(b)$  болатындай  $a, b \in U_i$  бар деп есептейік. Келесі формуланы қарастырамыз:

$$\phi(x, a) := U(x) \wedge \neg E(a, x) \wedge a \triangleleft x \wedge f(a) = f(x). \quad (5.12)$$

$M$  әлсіз циклдік минималды болғандықтан,  $\phi(M, a)$  жиыны дөңес жиындардың шекті санының бірігуі болып табылады және  $\phi(M, a)$  ең сол жақтағы жиын болсын. Сонда  $M \models \neg E(a, b) \wedge a \triangleleft b$  болатындай кейбір  $b \in U_i$  үшін  $\phi_1(M, a) = E(M, b)$  екені анық.

$\phi_1(M, b)$  мәнін қарастырайық. Кез келген  $c \in \phi_1(M, b)$  үшін  $M \models \neg E(b, c) \wedge b \triangleleft c$  орындалатынын көреміз. Сонда  $e \in \phi_1(M, c)$  және т.б. қарастырамыз. Сонда  $\phi(M, a)$  дөңес  $\neg \phi(M, a)$  -бөлінетін жиындардың шексіз санының бірігуі болып табылады, бұл  $M$  әлсіз циклдік минималдылығына қайшы келеді. Осылайша,  $\neg E(a, b)$  шарты бар кез келген  $a, b \in U_i$  үшін  $\neg E(a, b)$  бізде  $f(a) \neq f(b)$  болады.

Келесі формуланы қарастырсақ:

$$U(x, a) := U(x) \wedge a \triangleleft x \wedge \neg E(a, x). \quad (5.13)$$

Егер кез келген  $b_1, b_2 \in U(M, a) \cap U_i$  үшін  $K_0(a, b_1, b_2)$  болатындай  $K_0(a, b_1, b_2, f(a), f(b_1), f(b_2))$  ( $K_0(a, b_1, b_2, f(b_2), f(b_1), f(a))$ ) орындалса онда  $f$   $U_i/E$  бойынша оң (сол) монотонды. Сондықтан  $K_0(a, b_1, b_2, f(b_1), f(a), f(b_2))$  болатындай  $b_1, b_2 \in U(M, a) \cap U_i$  бар делік. Сонда  $M$  -нің әлсіз циклдік минималдылығына байланысты  $U(M, a)$   $s$  дөңес  $U_1(M, a)$ ,  $U_2(M, a)$ , ...,  $U_s(M, a)$  жиындарына бөлінетіндей  $s > 1$ , сондай-ақ

$$U(M, a) \cap U_i = \bigcup_{i=1}^{s-1} U_i(M, a) \cup [U_s(M, a) \cap U_i], \quad (5.14)$$

мұндағы  $U_i(M, a) \subset U_i$  және барлық  $1 \leq i \leq s-1$  үшін  $K_0(a, U_i(M, a), b_i)$  шартымен  $b_i \in U_i$  болады; және кез келген  $1 \leq s \leq s-1$  үшін және  $\text{rend}[U_s(M, a) \cap U_i] = \text{rend } U_i$ ,  $K_0(U_1(M, a), U_2(M, a), \dots, U_s(M, a))$

$$M \models \neg \exists x(K_0(U_i(M, a), x, U_{i+1}(M, a))). \quad (5.15)$$

Сондай-ақ әрбір тақ  $i \leq s$  үшін және кез келген  $b_1, b_2 \in U_i(M, a) \cap U_i$  үшін  $K_0(a, b_1, b_2, f(a), f(b_1), f(b_2))$  және әрбір жұп  $i \leq s$  үшін және кез келген

$b_1, b_2 \in U_i(M, a) \cap U_i$  үшін  $K_0(a, b_1, b_2, f(b_2), f(b_1), f(a))$  (немесе керісінше) болады. Келесі формулаларды қарастырсақ:

$$F_i(x, a) := x = a \wedge \exists t[U_i(t, a) \wedge K_0(a, x, t)], \quad 1 \leq i \leq s - 1.$$

Әрине,  $F_i(x, y)$  әрбір  $1 \leq i \leq s - 1$  үшін  $p$ -сақтайтын оң жақ дөңес формуласы. 5.1.4 теоремасы бойынша  $F_i(x, y)$  эквивалентті тудырушы қатынас болып табылады, демек, 5.1.3 леммасы бойынша  $E_i(x, y) := F_i(x, y) \vee F_i(y, x)$  эквиваленттік қатынас болып табылады, ол  $p(M)$  – ді шексіз дөңес кластардың шексіз санына бөледі, осылайша  $E_{i-1} \subseteq E_i$  – ні әрбір  $1 \leq i \leq s - 1$  үшін нақтылайды.

Жалпы, барлық  $K_0(a, b_1, b_2)$  болатын  $b_1, b_2 \in U_s(M, a) \cap U_i$  үшін  $K_0(a, b_1, b_2, f(a), f(b_1), f(b_2))$  орындалады. Сонда  $f \upharpoonright U_i/E_{s-1}$  бойынша оңға монотонды болады.

Жағдай 2.  $f \upharpoonright U_i$  бойынша локалды монотонды.

Жалпылықты жоғалтпай,  $f$  локалды оңға монотонды деп есептейміз. Келесі формуланы қарастырсақ

$$(x, y) := U(x) \wedge U(y) \wedge (x = y \vee [x \triangleleft y \rightarrow \forall t(K_0(x, t, y) \rightarrow K_0(f(x), f(t), f(y)))] \vee [y \triangleleft x \rightarrow \forall t(K_0(y, t, x) \rightarrow K_0(f(y), f(t), f(x)))]). \quad (5.16)$$

$E(x, y)$  –  $U_i$  ді шексіз дөңес кластардың шексіз санына бөлетін эквиваленттік қатынас екені анық, сондықтан әрбір  $E$ -класста  $f$  функциясы оңға монотонды болады. Қалғанын жағдайға 1 ұқсастық арқылы дәлелдейміз.  $\square$

## 5.2 Ортогональдылық

**Лемма 5.2.1.**  $T$   $\aleph_0$ -категориялық  $m$ -дөңес әлсіз циклдік дөңестік дәрежесі шекті теориясы болсын,  $m > 1$ ,  $M \models T$ . Сонда кез келген  $\bar{b} = \langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle \in M^4$  үшін

$$tp(\langle b_1, b_2 \rangle / \emptyset) = tp(\langle b_1, b_3 \rangle / \emptyset) = tp(\langle b_1, b_4 \rangle / \emptyset), \\ tp(\langle b_2, b_3 \rangle / \emptyset) = tp(\langle b_2, b_4 \rangle / \emptyset) \quad (5.17)$$

болатындай,  $tp(\langle b_1, b_2, b_3 \rangle / \emptyset) = tp(\langle b_1, b_2, b_4 \rangle / \emptyset)$  болады.

Лемма 5.2.1 дәлелдеу. Керісінше делік: лемманың шарттарын қанағаттандыратын  $b_1, b_2, b_3, b_4 \in M$  бар, бірақ  $tp(\langle b_1, b_2, b_3 \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle b_1, b_2, b_4 \rangle / \emptyset)$ . Демек,  $R(x, y, z)$   $L$ -формуласы бар

$$M \models R(b_1, b_2, b_3) \wedge \neg R(b_1, b_2, b_4). \quad (5.18)$$

$G(x, y)$   $tp(\langle b_1, b_2 \rangle / \emptyset)$  оқшаулаушы  $L$ -формуласы болсын. Сонда  $G(b_1, y)$

$G(b_1, y)$  типін оқшаулайды,  $G(x, b_2)$   $tp(b_1/\{b_2\})$  типін оқшаулайды және  $q_1(y) := \{G(b_1, y)\}$ ,  $q_2(x) := \{G(x, b_2)\}$  болсын. Жалпылықты жоғалтпай,  $K_0(b_2, b_3, b_4)$  болсын. Сонда  $R(b_1, y, z)$  түрлендірсек,  $R(b_1, y, z)$  —  $q_1$  - сақтаушы оңға дөңес формула (егер  $K_0(b_4, b_3, b_2)$ , онда  $R(b_1, y, z)$  —  $q_1$  - сақтаушы солға дөңес формула) екенін көрсек болады.

$R(b_1, b_2, z)$  формуласын қарастырысақ.  $M$  - нің әлсіз циклдік минималдылығына байланысты  $R(b_1, b_2, M)$  жиыны дөңес жиындардың шекті санының бірігуі болып табылады. Осы дөңес жиындардың әрқайсысы  $\{b_1, b_2\}$  — анықталатын болып табылады.  $R_0(b_1, b_2, z)$  формуласы  $b_3$  бар дөңес жиынды таңдасын. Содан кейін формула

$$R'(b_1, y, z) := \exists t [R_0(b_1, y, t) \wedge K(y, z, t)]$$

$q_1$ -сақтайтын оң жақ дөңес болып табылады.

$f_{b_1}(y) := \text{rend}_R R(b_1, y, M)$ ,  $g_{b_2}(x) := \text{rend}_R R(x, b_2, M)$  болсын.  $R(b_1, y, z)$  — эквивалент тудырушы, ал

$$E'_{b_1}(y, z) := R(b_1, y, z) \vee R(b_1, z, y) \quad (5.20)$$

$q_1(M)$  шексіз дөңес кластардың шексіз санына бөлетін эквиваленттік қатынас, демек, 2.7 [54] Тұжырымы бойынша (5.1.8 теоремасының сызықтық аналогы),  $f_{b_1} q_1(M)$  бойынша локалды тұрақты болып табылады, сондықтан  $f_{b_1} q_1(M)/E'_{b_1}$  бойынша оңға қарай монотонды.  $tp(\langle b_2, b_3 \rangle / \emptyset) = tp(\langle b_2, b_4 \rangle / \emptyset)$ ,  $g_{b_2} q_2(M)$  бойынша тұрақты бола алмайды. Сонда  $q_2(M)$  - ді дөңес кластардың шексіз санына бөлетін  $\{b_2\}$ - мен анықталатын  $E''_{b_2}$  эквиваленттік қатынас бар, осылайша  $g_{b_2} q_2(M)/E''_{b_2}$  бойынша қатаң монотонды болады. Жалпылықты жоғалтпай,  $q_2(M)/E''_{b_2}$  бойынша  $g_{b_2}$  монотонды оң деп есептейміз.  $K_0(b'_1, b_1, b_2)$  және  $\neg E''_{b_2}(b'_1, b_1)$  болатындай  $b'_1 \in q_2(M)$  ерікті элементін қарастырайық. Сонда  $K_0(b_2, g_{b_2}(b'_1), g_{b_2}(b_1))$ , яғни  $R(b'_1, b_2, M) \subset R(b_1, b_2, M)$ . Егер

$$M \models \forall z [R(b_1, b_2, z) \wedge \neg R(b'_1, b_2, z) \rightarrow (K_0(b_2, f_{b'_1}(z), f_{b_1}(z)) \vee f_{b'_1}(z) = f_{b_1}(z))],$$

орындалса, онда  $E'_{b'_1}$  классының тығыз реттілігімен қайшылық аламыз.

Демек,  $K_0(b_2, f_{b'_1}(b'_2), f_{b_1}(b_2))$  болатын  $b'_2 \in R(b_1, b_2, M) \setminus R(b'_1, b_2, M)$  аламыз.

Яғни,  $E'_{b'_1}$  - классының тығыз реттіне байланысты, тағы да құрамындағы  $E'_{b'_1}(b_2, M)$  бар  $E'_{b'_1}$  класстарының шексіз саны бар.  $E'_{b'_1}(b_2, M)$  бойынша  $b'_1$  элементінің еріктілігіне байланысты бізде:

$$M \models \forall y [G(y, b_2) \wedge K_0(y, b_1, b_2) \wedge \neg E''_{b_2}(y, b_1) \rightarrow E'_{b_1}(b_2, M)] \quad E'_y - \text{класстарының шексіз санын қамтиды.} \quad (5.21)$$

Бұл формуланы  $D(b_1, b_2)$  арқылы белгілейік. Сонда кез келген  $b''_2 \in q_1(M)$  үшін  $D(b_1, b''_2)$  болады. Әрі қарай,  $K_0(b''_1, b'_1, b_1)$  и  $\neg E''_{b_2}(b''_1, b'_1)$  болатындай  $b''_1$  аламыз және әрбір  $E'_{b'_1}$  классында  $E'_{b''_1}$  классының шексіз саны бар екенін көреміз және т.б. Бұл процедураны шексіз рет жалғастыруға болады. Сонда  $RC(q_1) \geq \omega$ ,  $T$  теориясының дөңес дәрежесінің шектілігіне қайшы келеді.  $\square$

**Лемма 5.2.2.**  $T$  —  $\aleph_0$ -категориялық 1-транзитивті емес әлсіз циклдік минималды дөңестік дәрежесі шекті теория болсын және  $p_1 := tp(a/\emptyset)$ ,  $p'_2 := tp(b/\{a\})$  алгебралық емес болатындай  $a, b \in M$  болсын.  $p'_2(M) \subseteq Dom(f)$  және  $f$  функциясы  $p'_2(M)$  бойынша константа болмайтындай  $\{a\}$  - анықталатын  $f$  функциясы бар деп есептейік. Сонда  $p'_2(M)$  дөңес кластардың шексіз санына бөлетін  $E(x, y)$   $\emptyset$ -анықталатын эквиваленттік қатынас болады, осылайша  $f \restriction p'_2(M)/E$  бойынша қатаң монотонды болады.

Лемма 5.2.2 дәлелдеу. Егер  $T$  1-дөңес болса, онда дәлелдеме 3.6 [54] Леммасынан шығады. Сондықтан ары қарай  $T$  —  $m$  -дөңес деп есептейміз, мұндағы  $m > 1$ . Егер  $f \restriction p'_2(M)$  бойынша қатаң монотонды болса, онда  $E(x, y) \equiv x = y$  және дәлелдейтін де ештеңе болмайды. Енді  $f \restriction p'_2(M)$  бойынша қатаң монотонды емес делік. Сонда, 2.7 [54] Тұжырымы бойынша,  $p'_2(M)$  шексіз дөңес кластардың шексіз санына бөлетін  $\{a\}$ -анықталатын  $E'_a(x, y)$  эквиваленттік қатынасы болады, сондықтан  $f \restriction p'_2(M)/E'_a$  бойынша қатаң монотонды. Керісінше делік:  $E'_a$   $\emptyset$ -анықталмайды.  $p_2 := tp(b/\emptyset)$  болсын.  $T$  шекті дөңестік дәрежесіне ие болғандықтан,  $n < \omega$  бар, сондықтан  $\{E_1(x, y), \dots, E_n(x, y)\}$   $\emptyset$ -анықталатын тривиальды емес эквиваленттік қатынастардың толық тізімі болып табылады, олардың әрқайсысы  $p_2(M)$  шексіз дөңес кластардың шексіз санына бөледі, сондықтан  $E_i$  әрбір  $1 \leq i \leq n-1$  үшін  $E_{i+1}$  бөліп тастайды.  $p'_2(M) \setminus \{a\}$  бойынша 1-айырылмайтын болғандықтан, не  $E'_a(b, M) \subset E_1(b, M)$  немесе кейбір  $i \leq n-1$  үшін  $E_i(b, M) \subset E'_a(b, M) \subset E_{i+1}(b, M)$  немесе барлық  $b \in p'_2(M)$  үшін  $E_n(b, M) \subset E'_a(b, M)$ . Жалпы алғанда, бірінші алсақ. Сонда келесі орындалатындай  $b, b', b'' \in p'_2(M)$  болады

$$M \models K_0(b, b', b'') \wedge E'_a(b, b') \wedge \neg E'_a(b', b'') \wedge E_1(b, b''), \quad (5.22)$$

$$tp(\langle b, b' \rangle / \emptyset) = tp(\langle b, b'' \rangle / \emptyset),$$

бірақ  $tp(\langle a, b, b' \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle a, b, b'' \rangle / \emptyset)$ , 5.2.1 Леммаға қайшы келеді.

**Лемма 5.2.3.** [54]  $T$  ерікті  $\aleph_0$ -категориялық теория болсын,  $M \models T$ ,  $A \subset M$ ,  $A$  шекті,  $m, n < \omega$ ,  $\bar{a} = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$ ,  $\bar{a}' = \langle a'_1, a'_2, \dots, a'_m \rangle \in M^m$ ,  $\bar{b} = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ ,  $\bar{b}' = \langle b'_1, b'_2, \dots, b'_n \rangle \in M^n$  барлық  $\bar{b} = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ ,  $\bar{b}' = \langle b'_1, b'_2, \dots, b'_n \rangle \in M^n$  үшін  $tp(\bar{b}/A) = tp(\bar{b}'/A)$ ,  $tp(\langle a_i, b_j \rangle / A) = tp(\langle a'_i, b'_j \rangle / A)$  болатындай. Сонда барлық  $1 \leq i \leq m$  және  $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n-1}, b_n \rangle / A) \neq tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n-1}, b''_n \rangle / A)$  үшін  $tp(\langle \bar{b}_{n-1}, b_n \rangle / A) = tp(\langle \bar{b}_{n-1}, b''_n \rangle / A)$ ,  $tp(\langle a_i, b_n \rangle / A) = tp(\langle a_i, b''_n \rangle / A)$  болатындай  $b''_n \in M$  бар болады сонда  $tp(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle / A) \neq tp(\langle \bar{a}', \bar{b}' \rangle / A)$  орындалады.

$p_1, p_2, \dots, p_s \in S_1(\emptyset)$  — алгебралық емес болсын,  $K_0(U_1, U_2, \dots, U_{sm})$  шартымен  $p_1, p_2, \dots, p_s$  типтерінің  $\{U_1, U_2, \dots, U_{sm}\}$  дөңес компоненттерінің жиыны және  $k \leq sm$  және  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq sm$  болсын. Егер әрбір  $k$ -кортеж  $\langle a_1, \dots, a_k \rangle \in U_{i_1} \times \dots \times U_{i_k}$   $\emptyset$  бойынша бірдей типті қанағаттандырса  $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}\}$   $\emptyset$  бойынша әлсіз ортогональ деп айтамыз.

$$K_0(a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^{n_1}), K_0(a_2^1, a_2^2, \dots, a_2^{n_2}), \dots, K_0(a_k^1, a_k^2, \dots, a_k^{n_k}) \quad (5.23)$$

$$tp(\bar{a}_1/\emptyset) = tp(\bar{a}'_1/\emptyset), tp(\bar{a}_2/\emptyset) = tp(\bar{a}'_2/\emptyset), \dots, tp(\bar{a}_k/\emptyset) = tp(\bar{a}'_k/\emptyset) \quad (5.24)$$

болған жағдайда, кез келген

$$\bar{a}_1 = \langle a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^{n_1} \rangle, \bar{a}'_1 = \langle (a_1^1)', (a_1^2)', \dots, (a_1^{n_1})' \rangle \in (U_{i_1})^{n_1}, \quad (5.25)$$

$$\bar{a}_2 = \langle a_2^1, a_2^2, \dots, a_2^{n_2} \rangle,$$

$$\bar{a}'_2 = \langle (a_2^1)', (a_2^2)', \dots, (a_2^{n_2})' \rangle \in (U_{i_2})^{n_2}, \dots, \bar{a}_k = \langle a_k^1, a_k^2, \dots, a_k^{n_k} \rangle, \quad (5.26)$$

$$\bar{a}'_k = \langle (a_k^1)', (a_k^2)', \dots, (a_k^{n_k})' \rangle \in (U_{i_k})^{n_k} \quad (5.27)$$

және  $(n_1, n_2, \dots, n_k) \in \omega^k$  тізбегі үшін  $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}\}$   $\emptyset$  - бойынша ортогональ болады деп айтамыз,

$$tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k \rangle / \emptyset) = tp(\langle \bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \dots, \bar{a}'_k \rangle / \emptyset) \quad (5.28)$$

**Мысал 5.2.4.**  $M := \langle M, =, K^3, f^1, P^1 \rangle$  циклдік реттелген құрылым болсын,  $M$  жүйесі  $Q_1, Q_2, Q_3$  және  $Q_4$  бөлінбеген бірігу болсын, мұндағы әрбір  $Q_i \in \mathbb{Q}$  дың ретті рационал санының көшірмесі,  $K_0(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ ;  $P(M) = Q_1 \cup Q_3$ , и  $f: P(M) \rightarrow P(M)$  оң жаққа монотонды биекция, сондықтан  $f(Q_1) = Q_3$  және  $f(Q_3) = Q_1$ .

Сонда  $M$  —  $\aleph_0$  - категориялық 2-дөңес әлсіз циклдік минималды дөңестік дәрежесі 1 құрылым,  $p := \{P(x)\} \in S_1(\emptyset)$  — алгебралық емес,  $Q_1$  және  $Q_3$  —  $p$  типтігің дөңес құрамдас бөліктері. Әлбетте,  $\{Q_1, Q_3\}$   $\emptyset$  бойынша әлсіз ортогональ емес.

**Лемма 5.2.5.**  $T$  —  $\aleph_0$ --категориялық  $m$ -дөңес әлсіз циклдік минималды шекті дөңестік дәрежелі теориясы болсын,  $m > 1$ ,  $M \models T$ ,  $p_1, p_2 \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес,  $U_1, U_2$   $p_1$  және  $p_2$  типтерінің дөңес құрамдас бөліктері тиісінше, сондықтан  $\{U_1, U_2\}$   $\emptyset$  шамасында әлсіз ортогональ болады. Сонда  $K_0(a, b_1, b_2)$ ,  $K_0(a', b'_1, b'_2)$  және  $tp(\langle b_1, b_2 \rangle / \emptyset) = tp(\langle b'_1, b'_2 \rangle / \emptyset)$  болатындай кез келген  $a, a' \in U_1$ ,  $b_1, b_2, b'_1, b'_2 \in U_2$  үшін  $tp(\langle a, b_1, b_2 \rangle / \emptyset) = tp(\langle a', b'_1, b'_2 \rangle / \emptyset)$  болады.

Лемманы дәлелдеу 5.2.5. Керісінше делік:  $K_0(a, b_1, b_2)$ ,  $K_0(a', b'_1, b'_2)$ ,  $tp(\langle b_1, b_2 \rangle / \emptyset) = tp(\langle b'_1, b'_2 \rangle / \emptyset)$  болатындай  $a, a' \in U_1$ ,  $b_1, b_2, b'_1, b'_2 \in U_2$  бар,

бірақ  $tp(\langle a, b_1, b_2 \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle a', b'_1, b'_2 \rangle / \emptyset) \cdot \emptyset$  бойынша  $\{U_1, U_2\}$  әлсіз ортогоналдылығына байланысты

$$tp(\langle a, b_1 \rangle / \emptyset) = tp(\langle a', b'_1 \rangle / \emptyset) = tp(\langle a, b_2 \rangle / \emptyset) = tp(\langle a', b'_2 \rangle / \emptyset). \quad (5.29)$$

Сонда Лемма 5.2.3 бойынша  $b''_2 \in U_2$  бар, осылайша

$$tp(\langle a, b_2 \rangle / \emptyset) = tp(\langle a, b''_2 \rangle / \emptyset), \quad tp(\langle b_1, b_2 \rangle / \emptyset) = tp(\langle b_1, b''_2 \rangle / \emptyset) \quad (5.30)$$

Және  $tp(\langle a, b_1, b_2 \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle a, b_1, b''_2 \rangle / \emptyset)$ , Лемма 5.2.1 қайшы.

**Лемма 5.2.6**  $T$  —  $\aleph_0$ -категориялық  $m$ -дөңес әлсіз циклдік минималды шекті дөңестік дәрежелі теориясы болсын,  $m > 1$ ,  $M \models T$ ,  $p_1, p_2, \dots, p_s \in S_1(\emptyset)$  — алгебралық емес және  $K_0(U_1, U_2, \dots, U_{sm})$  шартымен  $\{U_1, U_2, \dots, U_{sm}\}$  — жиыны  $p_1, p_2, \dots, p_s$  типтердің дөңес компоненттерінің жиыны. Айталық,  $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}\} \emptyset$  бойынша кейбір  $k \leq sm$  и  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq sm$  үшін жұптық әлсіз ортогоналды жиын. Сонда  $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}\} \emptyset$  бойынша әлсіз ортогональ болады.

Лемманы дәлелдеу 5.2.6.  $k \geq 2$  бойынша индукция арқылы дәлелдейік.  $k = 2$  қадамы анық.

Қадам  $k = 3$ . Белгілеуге ыңғайлы болу үшін  $\{U_{i_1}, U_{i_2}, U_{i_3}\} \{U_1, U_2, U_3\}$  деп белгілейік. Керісінше делік:  $tp(\langle a, b, c \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle a', b', c' \rangle / \emptyset)$  болатындай  $\langle a, b, c \rangle, \langle a', b', c' \rangle \in U_1 \times U_2 \times U_3$  бар болсын.  $U_1, U_2$  және  $U_3 \emptyset$  шамасында жұптық әлсіз ортогональ болғандықтан,

$$\begin{aligned} tp\left(\frac{\langle a, b \rangle}{\emptyset}\right) &= tp\left(\frac{\langle a', b' \rangle}{\emptyset}\right), tp\left(\frac{\langle a, c \rangle}{\emptyset}\right) = tp\left(\frac{\langle a', c' \rangle}{\emptyset}\right) \text{ және } tp\left(\frac{\langle b, c \rangle}{\emptyset}\right) \\ &= tp(\langle b', c' \rangle / \emptyset). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Лемма 5.2.3 бойынша  $c'' \in U_3$  бар, бұл

$$\begin{aligned} p\left(\frac{\langle a, c \rangle}{\emptyset}\right) &= tp\left(\frac{\langle a, c'' \rangle}{\emptyset}\right), tp\left(\frac{\langle b, c \rangle}{\emptyset}\right) = tp\left(\frac{\langle b, c'' \rangle}{\emptyset}\right) \text{ және} \\ &tp(\langle a, b, c \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle a, b, c'' \rangle / \emptyset). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Демек,  $R(x, y, z)$   $L$ -формуласы бар

$$M \models R(a, b, c) \wedge \neg R(a, b, c''). \quad (5.33)$$

$M$  әлсіз циклдік минималды болғандықтан

$$R(a, b, M) \text{ дөңес, } R(a, b, M) \subset U_3, \text{ лев } R(a, b, M)$$

$$= \text{lend } U_3 \text{ және } K_0(a, b, c, c'').$$

деп қарастырсақ болады.

$f_a(y) := \text{rend } R(a, y, M)$  және  $g_b(x) := \text{rend } R(x, b, M)$  функцияларын қарастырсақ. Назар аударыңыз,  $\{U_1, U_2\} \cap \emptyset$  шамасындағы әлсіз ортогональ болғандықтан,  $U_1$  және  $U_2$  құрамдастары сәйкесінше  $\{b\}$  және  $\{a\}$  бойынша 1-ажыратылмайды, демек, бұл функциялар  $U_1$  және  $U_2$  бойынша әрекетін өзгертпейді, тиісінше.  $U_1 \cap U_2$  және  $U_3 \cap \emptyset$  шамасында жұптық әлсіз ортогональ болғандықтан,  $f_a$  және  $g_b$  тиісінше  $U_1$  және  $U_2$  константалары болмайды. Лемма 5.2.2 бойынша, сәйкесінше  $U_2$  және  $U_1$  дөңес кластарды шексіз санына бөлетін  $E'(x, y)$ ,  $E''(x, y)$   $\emptyset$ -анықталатын эквиваленттік қатынастар бар, сондықтан  $f_a$  және  $g_b$  тиісінше  $\frac{U_2}{E'}$  және  $\frac{U_1}{E''}$  үшін қатаң монотонды. Жалпылықты жоғалтпай,  $f_a$  және  $g_b$  сәйкесінше  $\frac{U_2}{E'}$  және  $\frac{U_1}{E''}$  бойынша дұрыс монотонды деп есептейік.

$K_0(a, a_1, b) \wedge \neg E''(a, a_1) \rightarrow a_1 \in U_1$  аламыз. Сонда  $K_0(b, g_b(a_1), g_b(a))$ .

$U_2(M, a) = U_2$  болатындай  $U_2(y, a) \rightarrow L_a$ -формуласы болсын. Келесі формулаларды қарастырсақ:

$$\Phi_1(y) := U_2(y, a) \wedge \exists y_0 [E'(y_0, y) \wedge \forall z (R(a, b, z) \rightarrow R(a_1, y_0, z))],$$

$$\Phi_n(y) := U_2(y, a) \wedge \exists y_0 [E'(y_0, y) \wedge \forall y_1 \forall z (\neg \Phi_{n-1}(y_1)$$

$$\wedge U_2(y_1, a) \wedge R(a, y_1, z) \rightarrow R(a_1, y_0, z))], \quad (5.34)$$

Мұнда  $n \geq 2$ . Сонда  $T$   $\aleph_0$ -категориясына қайшы  $\Phi_1(M) \subset \Phi_2(M) \subset \dots \subset \Phi_n(M) \subset \dots$  аламыз.

Қадам  $k > 3$ .  $\langle a_1, a_2, \dots, a_{k-3} \rangle \in U_{i_1} \times U_{i_2} \times \dots \times U_{i_{k-3}}$  ерікті кортежді қарастырайық және  $M' = \langle M, a_1, a_2, \dots, a_{k-3} \rangle$  болсын.  $M'$  әлі де  $\aleph_0$ -категориялық әлсіз циклдік минималды дөңестік дәрежесі шекті екенін көру оңай.  $k - 3 \geq 1$  болғандықтан,  $M'$  де әлсіз о-минималды. Демек, лемманың қорытындысы 2.9 леммадан [54] шығады.

**Теорема 5.2.7.**  $T$  —  $\aleph_0$ -категориялық  $m$ -дөңес әлсіз циклдік минималды дөңестік дәрежесі шекті теория болсын,  $m > 1$ ,  $M \models T$ ,  $p_1, p_2, \dots, p_s \in S_1(\emptyset)$ -алгебралық емес, ал  $\{U_1, U_2, \dots, U_{sm}\}$  —  $K_0(U_1, U_2, \dots, U_{sm})$  шартымен  $\{U_1, U_2, \dots, U_{sm}\} \rightarrow p_1, p_2, \dots, p_s$  типтердің дөңес компоненттінің жиынтығы. Айталық,  $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}\}$  кейбір  $k \leq sm$  и  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq sm$  үшін  $\emptyset$ -бойынша жұптық әлсіз ортогоналды топ болсын. Сонда  $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}\} \cap \emptyset$ -ға ортогональ болады.

5.2.7 теореманы дәлелдеу. Белгілеуге ыңғайлы болу үшін  $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}\}$  мәнін  $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$  деп белгілейік.  $k \geq 2$  бойынша индукция арқылы дәлелдейміз.

Қадам  $k = 2$ .  $(n_1, n_2)$  индукциясы арқылы дәлелдейміз.  $K_0(a_1, a_2, \dots, a_{n_1})$ ,  $K_0(b_1, b_2, \dots, b_{n_2})$ , и  $tp(\bar{a}/\emptyset) = tp(\bar{a}'/\emptyset)$ ,  $tp(\bar{b}/\emptyset) = tp(\bar{b}'/\emptyset)$  болатындай

кез келген  $\bar{a} = \langle a_1, a_2, \dots, a_{n_1} \rangle, \bar{a}' = \langle a'_1, a'_2, \dots, a'_{n_1} \rangle \in [U_1]^{n_1}$ ,  $\bar{b} = \langle b_1, b_2, \dots, b_{n_2} \rangle, \bar{b}' = \langle b'_1, b'_2, \dots, b'_{n_2} \rangle \in [U_2]^{n_2}$  үшін  $tp(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle / \emptyset) = tp(\langle \bar{a}', \bar{b}' \rangle / \emptyset)$  аламыз.

Жағдай (1,1) тривиальды. 2-қадам кез келген  $(l_1, l_2) <_{lex} (n_1, n_2)$  үшін орнатылған деп есептейік және оны  $(n_1, n_2)$  үшін дәлелдейік. Керісінше делік:  $tp(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}', \bar{b}' \rangle / \emptyset)$ .  $\{U_1, U_2\}$   $\emptyset$ - бойынша әлсіз ортогоналдылығына байланысты барлық  $1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2$  үшін  $tp(\langle a_i, b_j \rangle / \emptyset) = tp(\langle a'_i, b'_j \rangle / \emptyset)$  бар. Сонда 5.2.3 леммасы бойынша  $b''_{n_2} \in U_2$  бар, сонда барлық  $1 \leq i \leq n_1$  және  $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n_2-1}, b_{n_2} \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n_2-1}, b''_{n_2} \rangle / \emptyset)$  үшін

$$tp(\langle \bar{b}_{n_2-1}, b_{n_2} \rangle / \emptyset) = tp(\langle \bar{b}_{n_2-1}, b''_{n_2} \rangle / \emptyset), \quad tp(\langle a_i, b_{n_2} \rangle / \emptyset) = tp(\langle a'_i, b''_{n_2} \rangle / \emptyset)$$

$A := \{\bar{a}_{n_1-1}, \bar{b}_{n_2-2}\}$  болсын. Егер  $A \neq \emptyset$  болса, онда 3.5 [54] теоремасына қайшылық аламыз. Егер  $A \neq \emptyset$  болса, онда  $n_1 = 1, n_2 = 2$  және бізде  $tp(\langle b_1, b_2 \rangle / \emptyset) = tp(\langle b_1, b''_2 \rangle / \emptyset)$ ,  $tp(\langle a_1, b_2 \rangle / \emptyset) = tp(\langle a_1, b''_2 \rangle / \emptyset)$  және  $tp(\langle a_1, b_1, b_2 \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle a_1, b_1, b''_2 \rangle / \emptyset)$  болады.  $\{U_1, U_2\}$   $\emptyset$  - бойынша әлсіз ортогоналдылығына байланысты, бізде  $tp(\langle a_1, b_1 \rangle / \emptyset) = tp(\langle a_1, b_2 \rangle / \emptyset)$  болады және 5.2.5 леммасына қайшылықты аламыз.

$k > 2$  қадам. Теорема барлық  $l \leq k - 1$  үшін  $l$  типті жиындарға орнатылған деп есептейік және оны  $k$  типті жиындар үшін дәлелдейік. 5.2.6 леммасы негізінде  $n_1 = 1, n_2 = 1, \dots, n_k = 1$  жағдайлары орындалады.  $k > 2$  қадамы барлық  $(l_1, l_2, \dots, l_k) <_{lex} (n_1, n_2, \dots, n_k)$  үшін орнатылған деп есептейік және оны  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$  үшін дәлелдесек.  $\bar{a}_{n_1} \in [U_1]^{n_1}, \bar{a}_{n_2} \in [U_2]^{n_2}, \dots, \bar{a}_{n_{k-2}} \in [U_{k-2}]^{n_{k-2}}$  ерікті кортеждерін аламыз. Индуктивті болжамға сүйенсек  $U_{k-1}$  және  $U_k$   $\{\bar{a}_{n_1}, \bar{a}_{n_2}, \dots, \bar{a}_{n_{k-2}}\}$  бойынша 1-ажыратылмайды кепілдік береді және  $U_{k-1} = p'_{k-1}(M), U_k = p'_k(M)$  болатындай  $p'_{k-1}, p'_k \in S_1(\{\bar{a}_{n_1}, \bar{a}_{n_2}, \dots, \bar{a}_{n_{k-2}}\})$  болады.  $M' = \langle M, \bar{a}_{n_1}, \bar{a}_{n_2}, \dots, \bar{a}_{n_{k-2}} \rangle$  болсын. Индуктивті болжам сонымен қатар  $p'_{k-1}$  және  $p'_k$   $M'$ -де әлсіз ортогональ екенін көрсетеді. 2-қадамда,  $\{p'_{k-1}, p'_k\}$   $M'$ -де  $\emptyset$  бойынша ортогональ, демек  $\{U_{k-1}, U_k\}$   $M$  де  $\{\bar{a}_{n_1}, \bar{a}_{n_2}, \dots, \bar{a}_{n_{k-2}}\}$  бойынша ортогональ.  $\{\bar{a}_{n_1}, \bar{a}_{n_2}, \dots, \bar{a}_{n_{k-2}}\}$  ерікті болғандықтан,  $\{U_1, \dots, U_k\}$   $\emptyset$  бойынша ортогональ.

### 5.3 Негізгі теорема

**Теорема 5.3.1.**  $T$  —  $\aleph_0$ -категориялық 1-транзитивті емес әлсіз циклдік минималды теория болсын. Сонда  $T$  бинарлы дерлік  $\Leftrightarrow T$  шекті дөңес дәрежесіне ие.

5.3.1 теоремасының дәлелдеуімен аяқталатын бірнеше тұжырымдарды дәлелдейміз.

**Лемма 5.3.2.**  $T$  —  $\aleph_0$ -категориялық  $m$ -дөңес әлсіз циклдік минималды дөңестік дәрежесі шекті теориясы болсын,  $m > 1$ ,  $M \models T$ ,  $p_1, p_2, p_3 \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес,  $U_1, U_2$  және  $U_3$  сәйкесінше  $p_1, p_2$  және  $p_3$  дөңес құрамдас бөліктері болып табылады.  $\{U_1, U_2\}$   $\emptyset$  бойынша әлсіз ортогональ емес деп

есептейік. Сонда  $tp(\langle a, c \rangle / \emptyset) = tp(\langle a, c' \rangle / \emptyset)$  ,  $tp(\langle b, c \rangle / \emptyset) = tp(\langle b, c' \rangle / \emptyset)$  болатындай кез келген  $a \in U_1$  ,  $b \in U_2$  ,  $c, c' \in U_3$   $p$  үшін  $tp(\langle a, b, c \rangle / \emptyset) = tp(\langle a, b, c' \rangle / \emptyset)$  орындалады.

Лемманы 5.3.2 дәлелдеу. Жалпылықты жоғалтпай,  $K_0(U_1, U_2, U_3)$  болсын. Керісінше делік: келесі орындалатындықтай  $R(x, y, z)$   $L$ -формуласы бар болсын.

$$M \models R(a, b, c) \wedge \neg R(a, b, c'). \quad (5.35)$$

$M$  -нің әлсіз циклдік минималдылығына байланысты  $R(a, b, M)$  дөңес деп алса болады ,  $R(a, b, M) \subset U_3$ ,  $lend_R R(a, b, M) = lend_R U_3$  және  $K_0(a, b, c, c')$ .

$$f_a(y) := rend_R R(a, y, M), g_b(x) := rend_R R(x, b, M) \quad (5.36)$$

$tp(\langle a, c \rangle / \emptyset) = tp(\langle a, c' \rangle / \emptyset)$  және  $tp(\langle b, c \rangle / \emptyset) = tp(\langle b, c' \rangle / \emptyset)$  ,  $f_a$  және  $g_b$  тиісінше  $A(a, M)$  және  $A(M, b)$  константалар бола алмайды, мұнда  $A(x, y)$   $tp(\langle a, b \rangle / \emptyset)$  оқшаулаушы  $L$ -формуласы болып табылады. Сондықтан, 5.2.2 леммасы негізінде, сәйкесінше  $A(a, M)$  және  $A(M, b)$  – ны дөңес класстардың шексіз санына бөлетін  $E(x, y)$  және  $E'(x, y)$   $\emptyset$ -анықталатын эквиваленттілік қатынастары бар, сондықтан  $f_a$  және  $g_b$  сәйкесінше  $A(a, M)/E$  және  $A(M, b)/E'$  бойынша қатаң монотонды. Жалпылықты жоғалтпай,  $f_a$  және  $g_b$  сәйкесінше  $(a, M)/E$  және  $A(M, b)/E'$  бойынша оң жақ монотонды деп есептейік. Әрі қарай Лемма 5.2 [54] аналогиясы арқылы дәлелдейміз.

**Лемма 5.3.3.**  $T$  —  $\aleph_0$ -категориялық  $m$ -дөңес әлсіз циклдік минималды дөңестік дәрежесі шекті теория болсын,  $m > 1$ ,  $M \models T$ ,  $p_1, p_2, p_3 \in S_1(\emptyset)$  — алгебралық емес,  $U_1, U_2, U_3$  — сәйкесінше  $p_1, p_2, p_3$  - ның дөңес құрамдас бөліктері болып табылады. Сонда  $tp(\langle a, b \rangle / \emptyset) = tp(\langle a', b' \rangle / \emptyset)$ ,  $tp(\langle a, c \rangle / \emptyset) = tp(\langle a', c' \rangle / \emptyset)$ ,  $tp(\langle b, c \rangle / \emptyset) = tp(\langle b', c' \rangle / \emptyset)$  болтындай кез келген  $a, a' \in U_1$ ,  $b, b' \in U_2$ ,  $c, c' \in U_3$  үшін  $tp(\langle a, b, c \rangle / \emptyset) = tp(\langle a', b', c' \rangle / \emptyset)$  орындалады.

Лемманы 5.3.3 дәлелдеу. Керісінше:  $tp(\langle a, b, c \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle a', b', c' \rangle / \emptyset)$  делік. Содан кейін, 5.2.3 леммасы бойынша,  $tp(\langle a, c \rangle / \emptyset) = tp(\langle a, c'' \rangle / \emptyset)$ ,  $tp(\langle b, c \rangle / \emptyset) = tp(\langle b, c'' \rangle / \emptyset)$  и  $tp(\langle a, b, c \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle a, b, c'' \rangle / \emptyset)$  болатындай  $c'' \in U_3$  бар. Егер  $U_1, U_2, U_3$   $\emptyset$  - бойынша жұпты әлсіз ортогональ болса, 5.2.6 леммасына қайшы болады.  $U_1, U_2, U_3$   $\emptyset$  - бойынша жұпты әлсіз ортогональ емес,  $\{U_1, U_2\}$   $\emptyset$  бойынша әлсіз ортогональ емес деп алсақ. Сонда Лемма 5.3.2-мен қайшылықты аламыз.

**Лемма 5.3.4.**  $T$  —  $\aleph_0$  - категориялық  $m$ -дөңес әлсіз циклдік минималды дөңестік дәрежесі шекті теориясы болсын,  $m > 1$ ,  $m$  алгебралық емес,  $U_1, U_2$  сәйкесінше  $p_1$  және  $p_2$  типтерінің дөңес құрамдас бөліктері,  $\{U_1, U_2\}$   $\emptyset$  шамасында әлсіз ортогональ емес. Сонда  $K_0(a_1, a_2, \dots, a_{n_1})$ ,  $K_0(b_1, b_2, \dots, b_{n_2})$ ,  $tp(\bar{a} / \emptyset) = tp(\bar{a}' / \emptyset)$ ,  $tp(\bar{b} / \emptyset) = tp(\bar{b}' / \emptyset)$  и  $tp(\langle a_i, b_j \rangle / \emptyset) = tp(\langle a'_i, b'_j \rangle / \emptyset)$  болатындай кез келген  $n_1, n_2 < \omega$  и  $\bar{a} = \langle a_1, a_2, \dots, a_{n_1} \rangle$ ,  $\bar{a}' = \langle a'_1, a'_2, \dots, a'_{n_1} \rangle \in [U_1]^{n_1}$ ,  $\bar{b} = \langle b_1, b_2, \dots, b_{n_2} \rangle$ ,  $\bar{b}' = \langle b'_1, b'_2, \dots, b'_{n_2} \rangle \in [U_2]^{n_2}$  және барлық  $i, j: 1 \leq$

$i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2$  үшін  $tp(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle / \emptyset) = tp(\langle \bar{a}', \bar{b}' \rangle / \emptyset)$  орындалады.

Лемманы 5.3.4 дәлелдеу.  $(n_1, n_2)$  бойынша индукция арқылы дәлелдейік. Қадам  $(1,1)$  тривиальды. Лемма  $(k_1, k_2) <_{lex} (n_1, n_2)$  шартымен барлық  $(k_1, k_2)$  үшін орнатылған және  $(n_1, n_2)$  үшін дәлелдейік. Керісінше:  $tp(\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}', \bar{b}' \rangle / \emptyset)$  делік. Сонда Лемма 5.2.3 бойынша  $b''_{n_2} \in U_2$  бар, сондықтан

$$tp\left(\frac{\langle \bar{b}_{n_2-1}, b_{n_2} b''_{n_2} \in U_2 \rangle}{\emptyset}\right) = tp\left(\frac{\langle \bar{b}_{n_2-1}, b''_{n_2} \rangle}{\emptyset}\right),$$

$$tp(\langle a_i, b_{n_2} \rangle / \emptyset) = tp(\langle a_i, b''_{n_2} \rangle / \emptyset) \quad (5.37)$$

барлық  $1 \leq i \leq n_1$  және  $tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n_2-1}, b_{n_2} \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}, \bar{b}_{n_2-1}, b''_{n_2} \rangle / \emptyset)$  үшін.

$A := \{\bar{a}_{n_1-1}, \bar{b}_{n_2-2}\}$  болсын. Егер  $A \neq \emptyset$  болса, онда келесі дәлел Лемма 5.4 [54] дәлелін қайталайды. Егер  $A = \emptyset$ , онда  $n_1 = 1, n_2 = 2$  және бізде

$$tp(\langle a_1, b_2 \rangle / \emptyset) = tp(\langle a_1, b''_2 \rangle / \emptyset), tp(\langle b_1, b_2 \rangle / \emptyset) = tp(\langle b_1, b''_2 \rangle / \emptyset). \quad (5.38)$$

Егер

$$tp(\langle a_1, b_1 \rangle / \emptyset) = tp(\langle a_1, b_2 \rangle / \emptyset) \quad (5.39)$$

орындалса, онда 5.3.1 Леммасына қайшылықты аламыз. Егер

$$tp(\langle a_1, b_1 \rangle / \emptyset) \neq tp(\langle a_1, b_2 \rangle / \emptyset) \quad (5.40)$$

болса, онда Лемма 5.3.2-на қайшылықты аламыз.  $\square$

5.3.1 теоремасын дәлелдеу.  $(\Rightarrow)$  Кез келген алгебралық емес  $p \in S_1(\emptyset)$  үшін  $RC(p) < \omega$  екенін түсіну жеткілікті.  $p \in S_1(\emptyset)$  алгебралық емес болсын және тек  $p$  -ті сақтайтын оң дөңес формулалар бар деп есептейік.

$RC(p) = n + 1$  екенін дәлелдейік.  $M \models T$  болсын. Керісінше алсақ:  $RC(p) > n + 1$ . Сонда кем дегенде  $n + 1$  параметрлік анықталатын эквиваленттік қатынастар  $E_1(x, y, \bar{a}_1), \dots, E_{n+1}(x, y, \bar{a}_{n+1})$  болады, мұндағы  $\bar{a}_i = \langle a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{n_i} \rangle \in M^{n_i}$ , сондықтан әрбір  $i \leq n + 1$  үшін  $p$  типінің кем дегенде бір дөңес компоненті шексіз дөңес  $E_i$ -класстарының шексіз санын қамтиды және шексіз дөңес  $E_{i-1}$  - ішкі класстарының шексіз санын қамтитын  $E_i$  - класстарының шексіз саны болады.  $A := \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n+1}\}$  болсын.  $A$  шекті екені анық. Сонда  $p'(M) \subseteq p(M)$  болатын алгебралық емес  $p' \in S_1(A)$  болады және ол әрбір  $i \leq n + 1$  үшін  $E_i(x, y, \bar{a}_i)$  қатынасы  $p'(M)$  типін шексіз дөңес кластардың шексіз санына бөледі, және әрбір  $i \leq n$   $E_i(x, y, \bar{a}_i) E_{i+1}(x, y, \bar{a}_{i+1})$ .  $T$  бинарлы дерлік болғандықтан, әрбір  $1 \leq s \leq k_i$ , үшін  $k_i \in \omega$  и  $r_{is} \leq n_i, 1 \leq t_1^s < t_2^s < \dots < t_{r_{is}}^s \leq n_i$  болады сондықтан

$$E_i(x, \alpha, \bar{a}_i) \equiv \bigvee_{s=1}^{k_i} \left[ \bigwedge_{j=1}^{r_{is}} \phi_{ij}^s \left( x, a_i^{t_j^s} \right) \wedge \psi_i^s(x, \alpha) \wedge K_0(a'_s, x, a''_s) \wedge K_0(\alpha, x, a'''_s) \right], \quad (5.41)$$

орындалады, мұнда  $\alpha \in p'(M)$ ,  $\phi_{ij}^s(x, y)$ ,  $\psi_i^s(x, y)$  — екі бос айнымалысы бар  $L$  – формулалары.  $E_i(M, \alpha, \bar{a}_i) \subset p'(M)$  болғандықтан, оң жақтағы әрбір дизъюнктивтік мүшесі  $p'(M)$  құрамында болады. Егер  $r_{is} = 0$  орындалса  $\psi_i^s(M, \alpha) \subset p'(M)$  болады. Егер  $r_{is} \neq 0$  және  $\bigwedge_{j=1}^{r_{is}} \phi_{ij}^s(M, a_i^{t_j^s}) \neq \emptyset$  болса барлық  $1 \leq j \leq r_{is}$  үшін  $p'(M) \subseteq \phi_{ij}^s(M, a_i^{t_j^s})$  болады, демек  $\psi_i^s(M, \alpha) \subset p'(M)$  орындалады. Жалпылықты жоғалтпай, егер  $r_{is} \neq 0$ , болса, онда  $\bigwedge_{j=1}^{r_{is}} \phi_{ij}^s(M, a_i^{t_j^s}) \neq \emptyset$  орындалады. Сонда  $E_i(x, \alpha, \bar{a}_i) \equiv \theta_i(x, \alpha)$ , мұндағы  $\theta_i(x, \alpha) := \bigvee_{s=1}^k \psi_i^s(x, \alpha)$ .  $\theta_i(x, y)$   $L$  -формуласы бар және кез келген  $\alpha \in p'(M)$  үшін  $\theta_i(M, \alpha) = E_i(M, \alpha, \bar{a}_i)$ .

$$\begin{aligned} \theta'_i(x, \alpha) &:= \theta_i(x, \alpha) \wedge \exists y[y \neq \alpha \wedge \theta_i(y, \alpha) \wedge \forall t(K(\alpha, t, y) \\ &\rightarrow \theta_i(t, \alpha)) \wedge K(\alpha, x, y)] \end{aligned} \quad (5.42)$$

$E_i(M, \alpha, \bar{a}_i) \subset p'(M)$  болғандықтан, оң жақтағы әрбір дизъюнктивтік мүше  $p'(M)$  құрамында болады. Егер  $r_{is} = 0$  болса,  $\psi_i^s(M, \alpha) \subset p'(M)$  болады. Егер  $r_{is} \neq 0$  және  $\bigwedge_{j=1}^{r_{is}} \phi_{ij}^s(M, a_i^{t_j^s}) \neq \emptyset$  орындалса, барлық  $1 \leq j \leq r_{is}$  үшін  $p'(M) \subseteq \phi_{ij}^s(M, a_i^{t_j^s})$  орындалады және демек  $\psi_i^s(M, \alpha) \subset p'(M)$  болады. Жалпылықты жоғалтпай, егер  $r_{is} \neq 0$  болса, онда  $\bigwedge_{j=1}^{r_{is}} \phi_{ij}^s(M, a_i^{t_j^s}) \neq \emptyset$  болсын делік. Сонда  $E_i(x, \alpha, \bar{a}_i) \equiv \theta_i(x, \alpha)$ , мұнда  $\theta_i(x, \alpha) := \bigvee_{s=1}^k \psi_i^s(x, \alpha)$ . Бізде  $\theta_i(x, y)$   $L$  - формуласы бар және кез келген  $\alpha \in p'(M)$   $\theta_i(M, \alpha) = E_i(M, \alpha, \bar{a}_i)$  үшін. Келесі орындалсын

$$\begin{aligned} \theta'_i(x, \alpha) &:= \theta_i(x, \alpha) \wedge \exists y[y \neq \alpha \wedge \theta_i(y, \alpha) \wedge \forall t(K(\alpha, t, y) \\ &\rightarrow \theta_i(t, \alpha)) \wedge K(\alpha, x, y)]. \end{aligned} \quad (5.43)$$

$\theta'_i(x, y)$  —  $p'$ -ті сақтайтын оң жақ дөңес формула екенін көру оңай, демек ол  $p$  - ті сақтайтын оң жақ дөңес екені анық. Осылайша, біздің болжамымызға қайшы, бізде кем дегенде  $n + 1$  оңға  $p$  - сақтайтын формулалар бар.

( $\Leftarrow$ )  $T$   $\aleph_0$ -категориялық болғандықтан,  $\emptyset$ -бойынша 1-типтер саны шекті және  $\{p_1, p_2, \dots, p_l\}$   $\emptyset$ -бойынша алгебралық емес 1- типтердің толық тізімі болсын. Сондай-ақ,  $\{U_1, U_2, \dots, U_{lm}\} = \{U_1, U_2, \dots, U_{lm}\}$  — шартымен  $p_1, p_2, \dots, p_s$  типті барлық дөңес компоненттерінің жиыны болсын. Белгілеуге ыңғайлы болу үшін  $lm$  — ді  $s$  деп белгілейміз.  $(s; n_1, n_2, \dots, n_s)$  индукциясы

бойынша мұндағы  $s \geq 2$ , кез келген  $n_1, n_2, \dots, n_s < \omega$  және кез келген өспелі  $\bar{a}_1, \bar{a}'_1 \in [U_1]^{n_1}, \bar{a}_2, \bar{a}'_2 \in [U_2]^{n_2}, \dots, \bar{a}_s, \bar{a}'_s \in [U_s]^{n_s}$  үшін  $tp(\bar{a}_1/\emptyset) = tp(\bar{a}'_1/\emptyset)$ ,  $tp(\bar{a}_2/\emptyset) = tp(\bar{a}'_2/\emptyset)$ , ...,  $tp(\bar{a}_s/\emptyset) = tp(\bar{a}'_s/\emptyset)$  болатындай, барлық  $i_1, i_2, j, k$ :  $1 \leq i_1 < i_2 \leq s, 1 \leq j \leq n_{i_1}, 1 \leq k \leq n_{i_2}$   $tp(\langle a_{i_1 j}, a_{i_2 k} \rangle/\emptyset) = tp(\langle a'_{i_1 j}, a'_{i_2 k} \rangle/\emptyset)$  үшін келесі теңдік орындалады

$$tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_s \rangle/\emptyset) = tp(\langle \bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \dots, \bar{a}'_s \rangle/\emptyset). \quad (*) \quad (5.44)$$

$(2; n_1, n_2)$  жағдайын қарастырайық. Егер  $\{U_1, U_2\}$   $\emptyset$ -бойынша әлсіз ортогональ болса, 5.2.7 теоремасы бойынша  $\{U_1, U_2\}$   $\emptyset$ -бойынша ортогональ болады, яғни,  $(*)$  орындалды. Егер  $\{U_1, U_2\}$   $\emptyset$  - шамасында әлсіз ортогональ болмаса,  $(*)$  5.3.4 леммасынан шығады.

Теорема барлық  $(s; k_1, k_2, \dots, k_s) <_{lex} (s; n_1, n_2, \dots, n_s)$  үшін белгіленген деп есептейік және оны  $(s; n_1, n_2, \dots, n_s)$  үшін дәлелдесек. Керісінше :  $tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_s \rangle/\emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \dots, \bar{a}'_s \rangle/\emptyset)$ . Индуктивті болжам бойынша  $p(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{s-1} \rangle/\emptyset) = tp(\langle \bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \dots, \bar{a}'_{s-1} \rangle/\emptyset)$ . Сонда 5.3.3 леммасы бойынша  $a''_{n_s} \in U_s$ , сондықтан барлық

$$1 \leq i \leq s-1, 1 \leq j \leq n_i \text{ және}$$

$$tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{s-1}, \bar{a}_{n_{s-1}}, a_{n_s} \rangle/\emptyset) \neq tp(\langle \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{s-1}, \bar{a}_{n_{s-1}}, a''_{n_s} \rangle/\emptyset)$$

үшін

$$tp(\langle \bar{a}_{n_{s-1}}, a_{n_s} \rangle/\emptyset) = tp(\langle a_{n_{s-1}}, a''_{n_s} \rangle/\emptyset), \quad tp(\langle a_{ij}, a_{n_s} \rangle/\emptyset) = tp(\langle a_{ij}, a''_{n_s} \rangle/\emptyset)$$

$A := \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{s-3}, \bar{a}_{n_{s-2}-1}, \bar{a}_{n_{s-1}-1}, \bar{a}_{n_s-1}\}$  болсын. Сонда

$$tp(\langle a_{n_{s-2}}, a_{n_{s-1}}, a_{n_s} \rangle/A) \neq tp(\langle a_{n_{s-2}}, a_{n_{s-1}}, a''_{n_s} \rangle/A). \quad (5.45)$$

Индукциялық гипотеза бойынша

$$tp\left(\frac{\langle a_{n_{s-2}}, a_{n_s} \rangle}{A}\right) = tp\left(\frac{\langle a_{n_{s-2}}, a''_{n_s} \rangle}{A}\right), \quad tp\left(\frac{\langle a_{n_{s-1}}, a_{n_s} \rangle}{A}\right) = tp(\langle a_{n_{s-1}}, a''_{n_s} \rangle/A). \quad (5.46)$$

$p'_{s-2} := tp(a_{n_{s-2}}/A)$ ,  $p'_{s-1} := tp(a_{n_{s-1}}/A)$ ,  $p'_s := tp(a_{n_s}/A)$  болсын.  $p'_{s-2}, p'_{s-1}$  және  $p'_s$  алгебралық емес екені анық. Содан кейін 5.3.3 Леммасы бойынша  $tp(\langle a_{n_{s-2}}, a_{n_{s-1}}, a_{n_s} \rangle/A) = tp(\langle a_{n_{s-2}}, a_{n_{s-1}}, a''_{n_s} \rangle/A)$ , біздің болжамымызға қайшы.

## 6 САНАЛЫМДЫ КАТЕГОРИЯЛЫҚ СЫЗЫҚТЫҚ РЕТТЕЛГЕН $E$ - КОМБИНАЦИЯЛАРЫ

Егер, кейбір реттік  $\lambda_i$  ординалдар үшін кез келген  $l, m \in \omega$  үшін  $M_l < M_m$  немесе  $M_m < M_l$  болса және  $M^+$  дөңес класстарға бөлетін  $E$  эквиваленттілік қатынасы  $\Sigma := \bigcup_{i \in \omega} \Sigma_i$ ,  $\{c_k^i | k < \lambda_i\} \subseteq dcl_{M_i}^<(\emptyset)$   $i \in \omega$   $\Sigma_i$  болса онда  $M^+ := \langle \bigcup_{i \in \omega} M_i; <, \Sigma, E^2, c_k^i \rangle_{k < \lambda_i, i \in \omega}$  —  $M_i$  құрылымының сызықты реттелген бөлшектелген  $E$  - комбинациясы (немесе жай ғана  $E$ -комбинациясы) болады.

Осылайша, біз  $M_i$ ,  $i \in \omega$  құрылымдарының ерікті  $E$  -комбинациясының сигнатурасына әрбір  $i \in \omega$  үшін  $dcl_{M_i}^<(\emptyset)$ - да орналасқан барлық элементтерді қосамыз, яғни егер  $M_1$  және  $M_2$  кейбір реттік  $\lambda$  үшін  $dcl_M^<(\emptyset)$  ішінде жататын  $\lambda$  элементтері бар  $M$  құрылымының изоморфты көшірмелері болса, онда  $2\lambda$  элементтері  $M_1$  және  $M_2$  құрылымдарынан  $E$  -комбинациясының сигнатурасына қосылады. Мұнда бізді бастапқы құрылымдардың белгілі бір қасиеттерін олардың  $E$  -комбинациясында сақтау мәселелері қызықтырады. Мысалы, егер барлық  $M_i$   $\aleph_0$ -категориялық болса, онда бұл құрылымдардың ерікті  $E$  -комбинациясының элементар теориясы қандай жағдайларда да  $\aleph_0$  -категориялық болады? Шарт әлсіреуі мүмкін: мұндай комбинация қашан эренфойхтты болады немесе ол максималды есептелетін спектрге қашан ие болады? Әлбетте, егер  $M$  бос емес  $dcl_M^<(\emptyset)$  бар  $\aleph_0$  -категориялық сызықты реттелген құрылым болса және  $M$  құрылымының  $\omega$  -көшірмелерінің ерікті  $E$  -комбинациясын қарастырамыз, сонда  $E$ - комбинациясының анықтамасы бойынша,  $dcl_{M^+}^<(\emptyset)$  шексіз болады, осыдан  $Th(M^+)$   $\aleph_0$ -категориялық емес екенін аламыз. Сондай-ақ,  $M_i$ ,  $i \in \omega$  жұптық изоморфты емес  $\aleph_0$ -категориялық сызықтық реттердің есептік санын қарастырсақ, онда бұл құрылымдардың кез келген  $E$  -комбинациясы  $\aleph_0$  -категориялық болмайды.

$M$  —  $\aleph_0$  - категориялық сызықтық реттілік болсын,  $a_1, \dots, a_n \in M$ ,  $n \geq 1$ . Егер  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  — ның  $M$  -де тікелей алдыңғысы болмаса, және  $a_{i+1}$  әрбір  $1 \leq i \leq n-1$  үшін  $a_i$  -дің тікелей мұрагері болса,  $\bar{a} := \langle a_1, \dots, a_n \rangle$  ақырлы сызықтық реттелікті немесе  $F(n)$  - реттелікті құрайды дейміз.  $M$   $a_n$  құрылымы  $\aleph_0$ -категориялық болғандықтан, кез келген шекті  $M$  ретінің ұзындығы  $m$  -нен аспайтындай  $m < \omega$  бар. Осылайша,  $M$  кейбір  $k < \omega$  және  $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k \leq m$  үшін  $n_1, n_2, \dots, n_k$  элементтерінен тұратын дәл  $k$  әр түрлі шекті сызықтық реттіліктерге ие.  $\aleph_0$  -категориялық сызықтық реттерді Дж.Розенштейн [68]-де жіктеген, мұнда ол тек екі операцияны қолданып оларды шекті сызықтық реттерден құрастырған. Егер  $\langle M_1, <_1 \rangle$  және  $\langle M_2, <_2 \rangle$  — сызықтық реттелген болса, онда олардың  $M_1 + M_2$  — деп белгіленген конкатациясы  $\langle M_1, <_1 \rangle$  и  $\langle M_2, <_2 \rangle$  болатындай сызықтық реттелген  $\langle M_1 \cup M_2, < \rangle$ , яғни

$$a < b \Leftrightarrow ([a, b \in M_1 \wedge a <_1 b] \text{ немесе } [a, b \in M_2 \wedge a <_2 b])$$

$$\text{немесе } [a \in M_1 \wedge b \in M_2]). \quad (6.1)$$

$\langle \mathbb{Q}_n, <_{\mathbb{Q}_n}, C_1^1, \dots, C_n^1 \rangle$  - Фрейстің жалпы  $n$ -түсті сызықтық реттілігі немесе әрбір  $1 \leq i \leq n$  үшін  $C_i(z_i)$  орындалатындай кез келген әр түрлі  $x$  және  $y$  үшін  $x$  пен  $y$  арасында  $z_1, \dots, z_n$  өзара тығыз  $n$  түсі бар саналымды тығыз сызықтық реттілік болады деп айтамыз.  $\langle M_1, <_1 \rangle, \dots, \langle M_n, <_n \rangle$  ерікті сызықтық реттілік болсын. Әрбір  $q \in \mathbb{Q}_n$  үшін егер  $\mathbb{Q}_n \models C_i(q)$  орындалса,  $M(q) = \langle M_i, <_i \rangle$  сызықтық ретінің көшірмесі ретінде анықтаймыз. Сонда  $\langle M_1, <_1 \rangle, \dots, \langle M_n, <_n \rangle$  - сызықтық ретінің  $\mathbb{Q}_n(M_1, \dots, M_n)$  белгіленуінің  $\mathbb{Q}_n$  - араласуын,  $\langle \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_n} M(q), < \rangle$  сызықтық реті деп атаймыз және

$$a < b \Leftrightarrow ([a, b \in M(q) \wedge a <_i b] \text{ немесе } [a \in M(q), b \in M(p) \wedge q <_{\mathbb{Q}_n} p])$$

орындалады. Жалпы жағдайды  $\mathbb{Q}$  -араласу деп аталады.

**Теорема 6.1.** [68] Егер  $\langle M, < \rangle$  конкатенациялардың немесе  $\mathbb{Q}$  - араластырмаларының шектеулі санын пайдаланып, жеке элементтерден құрастырылуы мүмкін болса ғана  $\langle M, < \rangle$  —  $\aleph_0$  -категориялық сызықтық тәртіп болады.

**Тұжырым 6.2.**  $M$  —  $\aleph_0$ - категориялық сызықтық реттілік болсын,  $M^+$   $M$  құрылымының  $\omega$  көшірмелерінің сызықты реттелген қиылыспайтын  $E$  - комбинациясы болсын.  $dcl_M(\emptyset) \neq \emptyset$  деп есептейік. Сонда  $Th(M^+)$   $2^\omega$  - саналымды модельге ие.

6.2 тұжырымын дәлелдеу.  $dcl_M(\emptyset) \neq \emptyset$  болғандықтан, онда  $M$  -ның  $\aleph_0$ - категориялық құрылымына байланысты  $c \in dcl_M(\emptyset)$  шекті саны болады. Демек,  $M^+$  -тегі әрбір  $E$  -класстың өз атауы бар, яғни ол кейбір  $c_i \in dcl_{M^+}(\emptyset)$  үшін  $E(c_i, M^+)$  тең.

Жағдай 1.  $M^+$  ішіндегі  $E$  -класстарының шексіз дискретті реттелген  $\{E(c_i, x) | i < \omega\}$  тізбегі бар.

Жалпылықты жоғалтпай, біз бұл тізбекті өспелі деп есептейміз. Сонда бізде екі мүмкіндік бар:

- (1) кез келген  $a \in M^+$  үшін  $a < E(c_i, M^+)$  болатындай  $i < \omega$  бар;
- (2) әрбір  $i < \omega$  үшін  $E(c_i, M^+) < E(c', M^+)$  болатындай  $c' \in dcl_{M^+}(\emptyset)$  бар.

Жалпылықты жоғалтпай, біріншіні алайық. Сонда

$$p(x) := \{\forall y [E(c_i, y) \rightarrow y < x] | i \in \omega\} \quad (6.2)$$

$M^+$  ішінде  $\emptyset$ -анықталатын 1-типті анықтайды.

Жағдай 2.  $M^+$  - де  $E$ -класстарының шексіз дискретті реттелген тізбектері болмайды. Сонда  $n < \omega$  болатындай,  $M^+$  құрамында  $F(n)$ -реттері бар  $E$ -классы болады және кез келген  $m > n$  үшін  $E$ -классы үшін  $F(m)$  - реті болмайды.

Демек,  $1 \leq n_1 \leq n$  шартымен бар  $n_1 < \omega$  бар және  $F(n_1)$  — реттері тығыз реттелген  $M^+$  ішінде ашық  $(a, b)$  интервалы бар. Содан кейін  $(a, b)$  құрамындағы және кейбір  $F(n_1)$  -ретінің соңғы элементі болып табылатын еркін

$E$ -класстағы  $E(c_i, M^+)$  аламыз және келесі формулалар жинағын қарастырамыз:

$$p(x) := \{\neg E(c_i, x) \wedge c_i < x\} \cup \{\forall y[E(c_j, y) \rightarrow x < y] | c_i < c_j \wedge \neg E(c_i, c_j)\}. (6.3)$$

Әлбетте,  $p(x)$   $M^+$  ішінде  $\emptyset$ -анықталатын 1-типті анықтайды.  $(a, b)$  ішінде  $F(n_1)$ -ретінің тығыз реттілігіне байланысты бізде  $2^\omega$  ерекше  $\emptyset$ -анықталатын 1-типтері болады, осыдан  $Th(M^+)$  шағын емес, демек  $Th(M^+)$   $2^\omega$  саналымды моделдері бар.

**Мысал 6.3**  $M$  —  $\aleph_0$ -категориялық сызықтық реттілік болсын,  $M^+$  —  $M$  құрылымының  $\omega$  көшірмелерінің сызықты реттелген қиылыспайтын  $E$  - комбинациясы болсын. Бізде  $M^+$  бойынша  $E$  -класстарының келесі реті бар делік:

$$\mathbb{Q}_1(2) + \mathbb{Q}_1(3) + \mathbb{Q}_1(2) + \mathbb{Q}_1(3) + \dots + \mathbb{Q}_1(2) + \mathbb{Q}_1(3) + \dots,$$

Яғни  $S := \mathbb{Q}_1(2) + \mathbb{Q}_1(3)$  конкатенациясының шекті саны бар.

Келесі формулаларды қарастырсак:

$$\phi_2^l(x) := \exists y_r [x < y_r \wedge \forall t (x \leq t \leq y_r \rightarrow x = t \vee t = y_r)] \wedge (6.4)$$

$$\forall u (y_r < u \rightarrow \exists v_r (y_r < v_r < u)) \wedge \forall y_l (y_l < x \rightarrow \exists v_l [y_l < v_l < x]),$$

$$\phi_2^r(x) := \exists y_l [y_l < x \wedge \forall t (y_l \leq t \leq x \rightarrow y_l = t \vee t = x)] \wedge$$

$$\forall u (u < y_l \rightarrow \exists v_l (u < v_l < y_l)) \wedge \forall y_r (x < y_r \rightarrow \exists v_r [x < v_r < y_r]).$$

Әлбетте,  $\phi_2^l(x)$  "  $x$  - дублеттің сол жақ нүктесі", ал  $\phi_2^r(x)$  "  $x$  - дублеттің оң жақ нүктесі " дегенін білдіреді. Сонда  $\phi_2(x) := \phi_2^l(x) \vee \phi_2^r(x)$  формуласында "  $x$  – дублет элементі" дегенді білдіреді. Сол сияқты,  $\phi_3(x)$  мәнін анықтауға болады, бұл « $x$  – үштіктің элементі» дегенді білдіреді. Ары қарай келесі формула

$$\phi_{21}(x) := \phi_2(x) \wedge \forall y [y < x \rightarrow \phi_2(y)] (6.5)$$

$\mathbb{Q}_1(2)$  сызықтық реттілігінің шеткі сол жақ көшірмесін көрсетеді. Сол сияқты, келесі формула

$$\phi_{31}(x) := \phi_3(x) \wedge \forall y [y < x \rightarrow \phi_{21}(y) \vee \phi_3(y)] (6.6)$$

$\mathbb{Q}_1(3)$  сызықтық реттілігінің шеткі сол жақ көшірмесін көрсетеді. Әрбір натурал  $k \geq 2$  үшін келесі формулаларды қарастырсак:

$$\phi_{2k}(x) := \phi_2(x) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k-1} \neg \phi_{2i}(x) \wedge \forall y [y < x \wedge \neg \phi_2(y) \rightarrow \bigvee_{j=1}^{k-1} \phi_{3j}(y)],$$

$$\phi_{3k}(x) := \phi_3(x) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k-1} \neg \phi_{3i}(x) \wedge \forall y[y < x \wedge \neg \phi_3(y) \rightarrow \bigvee_{j=1}^k \phi_{2j}(y)]. \quad (6.7)$$

Әлбетте,  $\phi_{2k}(x)$  сызықтық  $\mathbb{Q}_1(2)$  ретінің  $k$ -ші көшірмесін көрсетеді, ал  $\phi_{3k}(x)$  формуласы әрбір  $k \geq 2$  үшін  $\mathbb{Q}_1(3)$  сызықтық ретінің  $k$ -шы копиясын таңдайды.

Осылайша,  $M^+/E$ -де эквивалент емес  $\emptyset$  анықталатын формулалардың шексіз саны бар. Сонда  $M^+$ -де эквивалент емес  $\emptyset$ -анықталатын формулалардың шексіз саны бар екенін түсінеміз. Келесі формуланы қарастырсақ:

$$\begin{aligned} \Phi_2^l(x) := & \exists y_r[x < y_r \wedge \neg E(x, y_r) \wedge \forall t(x \leq t \leq y_r \rightarrow E(x, t) \vee E(t, y_r)) \wedge \\ & \forall u(y_r < u \wedge \neg E(y_r, u) \rightarrow \exists v_r(y_r < v_r < u \wedge \neg E(y_r, v_r) \wedge \neg E(v_r, u)))] \wedge \\ & \forall y_l(y_l < x \wedge \neg E(y_l, x) \rightarrow \exists v_l[y_l < v_l < x \wedge \neg E(y_l, v_l) \wedge \neg E(v_l, x)]). \end{aligned} \quad (6.8)$$

$\Phi_2^l(x)$  формуласы дублеттің сол  $E$ -классында жатқан  $M^+$  элементтерін  $E$ -класстарынан бөліп көрсетеді.  $\Phi_2^r(x)$ ,  $\Phi_2(x)$ ,  $\Phi_3(x)$ ,  $\Phi_{2k}(x)$ ,  $\Phi_{3k}(x)$  формулалары кез келген  $k \geq 2$  үшін дәл осылай анықталады, осыдан  $M^+$  бойынша эквивалентсіз  $\emptyset$ -анықталатын формулалардың шексіз санын аламыз, яғни  $Th(M^+)$   $\aleph_0$ -категориялық болмайды.

Сондай-ақ  $Th(M^+)$   $2^\omega$  саналымды моделі бар екенін байқаймыз. Келесі формулалар жинағын қарастырамыз:

$$p(x) := \{\forall y[\Phi_{2k}(y) \rightarrow y < x] \mid k < \omega\} \cup \{\forall y[\Phi_{3m}(y) \rightarrow y < x] \mid m < \omega\} \quad (6.9)$$

Әлбетте,  $p(x)$   $M^+$  ішінде анықталатын 1-типті анықтайды.

$\mathbb{Z}\mathbb{E}[S]$   $\omega^* + \omega$  типі бойынша реттелген  $S$ -көшірмелер ( $E$ -класс реттілігінің көшірмелері) жинағын білдіреді. Содан кейін  $F(k)^{\mathbb{Z}\mathbb{E}[S]}$  ( $\omega^{\mathbb{Z}\mathbb{E}[S]}$  және  $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}\mathbb{E}[S]}$ ) арқылы  $F(k)$  реттелген (сәйкесінше  $\omega$  және  $\mathbb{Q}$ ) көшірмелер жиынтығын белгілейміз. Сонда  $p(x)$  типін келесі жиын арқылы жүзеге асыруға болады деп айтамыз:

$$F_1(k_1)^{\mathbb{Z}\mathbb{E}[S]} + \mathbb{Q}^{\mathbb{Z}\mathbb{E}[S]} + F_2(k_2)^{\mathbb{Z}\mathbb{E}[S]} + \mathbb{Q}^{\mathbb{Z}\mathbb{E}[S]} + \dots + F_n(k_n)^{\mathbb{Z}\mathbb{E}[S]} + \mathbb{Q}^{\mathbb{Z}\mathbb{E}[S]} \quad (6.10)$$

кез келген  $0 \leq n, k_i \leq \omega$  үшін, мұнда әрбір  $2 \leq i \leq n-1$  үшін  $k_i \neq 0$  болса, онда  $k_i \geq 2$ ; және егер  $k_i = \omega$  болса, онда  $F_i(k_i)^{\mathbb{Z}\mathbb{E}[S]} \equiv \omega^{\mathbb{Z}\mathbb{E}[S]}$ , осыдан  $Th(M^+)$   $2^\omega$  саналымды модельдері бар екенін аламыз.  $\square$

**Теорема 6.4.**  $M$  —  $\aleph_0$ -категориялық сызықтық реттілік,  $M^+$   $M$  құрылымының  $\omega$  көшірмелерінің сызықты реттелген қиылыспайтын  $E$ -комбинациясы болсын. Сонда:

(1)  $Th(M^+)$  —  $\aleph_0$ -категориялық теория болады, егер  $dcl_M(\emptyset) = \emptyset$  және  $\langle M^+/E, <_{ind} \rangle$  —  $\aleph_0$ -категориялық болса, мұндағы  $<_{ind} - M^+$  ішіндегі  $E$ -классындағы индукцияланған рет.

(2) Егер  $Th(M^+)$  теориясы  $\aleph_0$ -категориялық болмаса, онда  $Th(M^+)$   $2^\omega$  саналымды моделіне ие.

Теорема 6.4 дәлелдеу.  $(\Rightarrow) Th(M^+)$  теориясы  $\aleph_0$ -категориялы болсын. Тұжырым 6.2 бойынша  $dcl_M(\emptyset) = \emptyset$ . Керісінше :  $M^+/E$   $\aleph_0$  категориялы болмайды.

Жағдай 1. Әрбір  $n < \omega$  үшін  $M^+/E$  шекті  $F(n_1)$ -реттерін қамтитындай  $n_1 \geq n$  бар. Содан кейін  $E$ -класстарының шексіз дискретті реттелген тізбегін қамтитын  $M^+$  құрылымының  $M_1$  элементар кеңейтімі бар, осыдан  $Th(M^+)$   $\aleph_0$ -категориялық емес екенін көреміз. Енді  $Th(M^+)$   $2^\omega$  саналымды моделі бар екенін түсінейік. Жалпылықты жоғалтпай, біз бұл тізбекті өспелі деп есептейік. Берілген өспелі тізбегінің бірінші  $E$ -класында жататын ерікті  $a \in M^+$  алып, келесі формулаларды қарастырсақ :

$$F_1(a, x) := E(a, x),$$

$$F_2(a, x) := \neg F_1(a, x) \wedge \forall y (a < y < x \wedge \neg F_1(a, y) \rightarrow E(y, x)),$$

$$F_n(a, x) := \bigwedge_{i=1}^{n-1} \neg F_i(a, x) \wedge \forall y [a < y < x \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} \neg F_i(a, y) \rightarrow E(y, x)] \quad (6.11)$$

Жалпылықты жоғалтпай, кез келген  $b \in M^+$  үшін  $b < F_i(a, M^+)$  болатындай  $i < \omega$  бар деп есептейміз. Сонда келесі формулалар жинағы

$$p(x) := \{\forall y [F_k(a, y) \rightarrow y < x] \mid k < \omega\} \quad (6.12)$$

$M^+$  ішінде  $\{a\}$  анықталатын 1-типті анықтайды. Демек, 6.2 Тұжырымының дәлелі сияқты,  $Th(M^+)$   $2^\omega$  саналымды моделі бар екенін аламыз.

Жағдай 2.  $M^+/E$  құрамында шекті  $F(n)$ -реттері бар және кез келген  $m > n$  үшін шекті  $F(m)$  реттері жоқ болатындай  $n < \omega$  бар.

Сонда  $M^+/E$  кейбір  $k < \omega$  және  $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k \leq n$  үшін  $n_1, n_2, \dots, n_k$  элементтерінен тұратын  $k$  әр түрлі шекті сызықтық реттерден тұрады.  $M^+/E$   $\aleph_0$ -категориялық емес болғандықтан, 6.1 теоремасы бойынша келесі жағдайлар орындалады:

Жағдай 2а. Кейбір  $1 \leq s \leq k$  үшін  $F(n_s)$  - реті және  $\mathbb{Q}$ -араласу  $\mathbb{Q}_t(M'_1, \dots, M'_t)$  болады, мұнда  $M'_1, \dots, M'_t$  — шекті немесе  $\aleph_0$ -категориялық сызықтық реттіліктер, сонымен қатар, барлық  $1 \leq c \leq t$  үшін  $F(n_s) \not\approx M'_c$  және бұл реттіліктер кезектесіп отырады.

Жағдай 2б.  $\mathbb{Q}_l(M_1, \dots, M_l)$  және  $\mathbb{Q}_t(M'_1, \dots, M'_t)$   $\mathbb{Q}$ -араласуы болады, мұнда  $M_1, \dots, M_l, M'_1, \dots, M'_t$  — шекті немесе  $\aleph_0$ -категориялық сызықтық реттіліктер және барлық  $1 \leq c \leq t$  үшін  $1 \leq r \leq l$  және  $M_r \not\approx M'_c$  болатындай кем дегенде бір  $r$  бар немесе барлық  $1 \leq c \leq l$  үшін  $1 \leq v \leq t$  және  $M'_v \not\approx M_c$  болатындай кемінде бір  $v$  болады және бұл реттер шексіз рет кезектесіп отырады.

Екі жағдайда да  $Th(M^+)$  теориясының  $\aleph_0$ -категориялыққа қайшы келетін эквивалентті емес формулалардың шексіз саны барын айта аламыз. Сонда, 6.3-мысалына сәйкес,  $Th(M^+)$   $2^\omega$  саналымды моделі бар екенін көрсете аламыз.

( $\Leftarrow$ )  $dcl_M(\emptyset) = \emptyset$  және  $\langle M^+/E, <_{ind} \rangle$  —  $\aleph_0$ -категориялық болсын. Сонда  $Th(M^+)$  теориясының аксиомалары келесі тұжырымдар болады:

(1)  $<$  қатынас үшін сызықтық реттілік аксиомалары;

(2)  $E$  қатынасы үшін рефлексивтілік, симметриялық және транзитивтілік аксиомалары;

$$(3) \{\phi_E | \phi \in Th(M)\};$$

$$(4) \{\phi^E | \phi \in Th(M^+/E)\}. \quad (6.13)$$

Мысалы, егер  $\phi := \exists x \forall y [x \leq y] \in Th(M)$  болса, онда

$$\phi_E \equiv \exists x \forall y [E(x, y) \rightarrow x \leq y] \quad (6.14)$$

формуласы болады. Егер  $\psi := \forall x \exists y [x < y] \in Th(M)$  орындалса, онда

$$\psi_E \equiv \forall x \exists y [E(x, y) \wedge x < y]. \quad (6.15)$$

Әрі қарай, егер  $\phi := \exists x \forall y [x \leq y] \in Th(M)$  орындалса, онда  $\phi_E \equiv \exists x \forall y [E(x, y) \rightarrow x \leq y]$  формула орындалады.

Егер

$$\psi := \forall x \exists y [x < y] \in Th(M^+/E),$$

болса онда

$$\psi^E \equiv \forall x \exists y [\neg E(x, y) \wedge x < y]. \quad (6.16)$$

$M$  и  $M^+/E$   $\aleph_0$ -категориялық болғандықтан,  $Th(M)$  және  $Th(M^+/E)$  теориялары шекті аксиоматизацияланатын болады, сондықтан  $Th(M^+)$  да  $\aleph_0$ -категориялық.

Егер  $dcl_M(\emptyset) \neq \emptyset$  бар болса, онда кейбір  $c \in dcl_M(\emptyset)$  болатын еді, демек,  $M \models \exists! x \theta(x) \wedge \theta(c)$  болатын  $\emptyset$ -анықталатын  $\theta(x)$  формуласы болатынын айта аламыз. Бірақ онда  $\mu := \exists! x \theta(x) \in Th(M)$ , мұнда  $\mu_E := \forall y \exists! x [E(x, y) \wedge \theta(x)]$  болады.  $E$ -комбинациясының анықталуымен келесі жағдайлар орындалатын еді:

$$\begin{aligned} M^+ \models \forall y_1 \forall y_2 [\neg E(y_1, y_2) \rightarrow \exists! x_1 \exists! x_2 (E(y_1, x_1) \wedge E(y_2, x_2) \\ \wedge \theta(x_1) \wedge \theta(x_2) \wedge x_1 \neq x_2)]. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Демек,  $dcl_{M^+}(\emptyset)$  шексіз, сондықтан  $Th(M^+)$  теориясы  $\aleph_0$ -категориялық емес.

## ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық жұмыс модельдер теориясының маңызды проблемасы болып табылатын модельдер құрылымдарының қасиеттерін зерттеумен қатар оларды сипаттау және классификациясымен байланысты.

Жұмыста сызықты реттелген құрылым классының ішкі классы болатын әлсіз о-минималды теориялардың қасиеттері зерттелді.

Сондай-ақ, омега - категориялық дерлік түсінігі, яғни саналымды категориялықтың нұсқалары қарастырылды. Саналымды модельдер саны аз болатын ақырлы дөңестік дәрежесі бар, әлсіз о-минималды теориялардың омега – категориялық дерлік болатындығы дәлелденді. Сондай-ақ, әлсіз о-минималды теориялар классының ішкі классы әбден о - минималды теориялар зерттелді және омега - категориялық дерлік әбден о - минималды теориялардың бинарлылығы дәлелденді. Омега категориялық дерлік әлсіз теориялары үшін бинарлы оқшаулайтын таралу алгебралары қарастырылды, яғни алгебралық емес 1-типтер үшін алгебра сипаттамасы алынды, әлсіз ортогональды алгебралық емес 1 – типті жұптардан жоғары бинарлы алгебра формулаларының жалпылама критеріі табылды. Әлсіз о-минималды құрылымдармен қатар, о-минималдылықтың нұсқасы болып табылатын циклдік реттелген жиындар үшін әлсіз циклдік минималды құрылымдар қарастырылды. Циклдік құрылым тернарлы қатынаста болатындықтан, циклдік реттелген құрылым бинарлы болмайтындығы белгілі. Жұмыста бинарлылық дерлік түсінігі алынды, яғни бинарлық нұсқасын циклдік реттелген құрылым үшін де қарастыруға болатындығы көрсетілді.

$M_1, \dots, M_n$  эренфойхты болатын сызықты реттелген құрылым болсын,  $n < \omega$ ,  $M \text{ dcl}_M(\emptyset) = \emptyset$  бар  $\aleph_0$ -категориялық сызықтық реттелінген,  $M^+$  -  $M_1, \dots, M_n$  құрылымдарының сызықты реттелген қиылыспайтын комбинациясы және  $M$  құрылымының  $\omega$  копиясы болсын. Сонда  $Th(M^+)$  теориясы эренфойхты  $\Leftrightarrow \langle M^+/E, <_{ind} \rangle \aleph_0$  – категориялық болады. Осылайша, таза сызықтық реттіліктің еркін саналымды категориялық теориясының копияларының саналымды санының  $E$  - комбинациясының саналымды категориясы туралы мәселесі қарастырылды. Бұл жағдайда мұндай  $E$  - комбинацияның саналымды спектрі не 1, не  $2^\omega$  болатыны көрсетілген. Нәтижесінде, егер эренфойхтық теорияларының шектеулі болатын жұпты изоморфты емес саналымды модельдердің шектеулі саны бар теорияларының санын қоссақ, сонда алынған  $E$ -комбинация  $E$  арқылы факторизацияланатын саналымды категориялық құрылым жағдайында эренфойхтық болатынын көрдік

$m > 1$  үшін бинарлы болғанда дөңестік дәрежесі 1 – ге тең саналымды категориялық  $m$ -дөңес әлсіз циклді минималды құрылымдар сипатталды. Сондай-ақ, дөңестік рангі түсінігіндегі бинарлы дерлік саналымды категориялық 1-транзитивті емес әлсіз циклді минималды құрылымдар критеріі алынды.

Диссертациялық жұмыста, реляциялық мәліметтер базасы қосымша қатынастармен реттелген анықталу облысы бойынша қаралды, мысалы ретінде бинарлы қосу операциясымен қатар рационалды сандардың реттелген жиынын

алсақ болады. Бірінші ретті (FO) предикат логикалық тіл сұрау тілі ретінде пайдаланылса, сұраулар барлық доменде өзгертін айнымалы мәндермен дерекқор қатынастарын да, домен қатынастарын да пайдалана алады. Біздің зерттеуіміз бірінші ретті сұраныстарға бағытталған, олар ретті сақтайтын ауыстыруға қатысты инвариантты болды, мұндай сұраныстарды рет-генерикалық деп атадық. Кейбір облыстар үшін бірінші ретті рет-генерикалық сұраныстар таза реттік сұраныстарға дейін азайтылатыны анықталды. Зерттеу жұмысында кіші есептік спектрі бар және дөңестік рангісі 1 болатын әлсіз о-минималды анықтау облысы бойынша редукция теоремасын дәлелдедік.

Осылайша, таза сызықты реттелген саналымды категориялық теорияның саналымды тудыруша копия санының E-комбинациясының саналымды категориялық сұрақтары толығымен сипатталды. Бұл жағдайда, E - комбинациясының саналымды спектрі 1-ге немесе  $2^{\omega}$  тең екендігі көрсетілді.

## ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- 1 Baldwin J., Lachlan A. On strongly minimal sets // The Journal of Symbolic Logic. –1976. – Vol. 36. – P. 79-96.
- 2 Pillay A., Steinhorn C. Definable sets in ordered structures I // Transactions of American Mathematical Society. – 1986. – Vol. 295. – P. 565–592.
- 3 Knight J., Pillay A., Steinhorn Ch. Definable sets in ordered structures II // Transactions of the American Mathematical Society. – 1986. – Vol. 295. – P. 593–605.
- 4 Pillay A., Steinhorn Ch. Definable sets in ordered structures III // Transactions of the American Mathematical Society. – 1988. – Vol. 309. – P. 469–476.
- 5 den Dries L. van Remarks on Tarski's problem concerning  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \exp)$  // Logic Colloquium '82. – North-Holland, 1984. – P. 97–121.
- 6 Wilkie A.J. Model-completeness results for expansions of the real field by restricted Pfaffian functions and the exponential function // Journal of the American Mathematical Society. – 1996. – Vol. 9. – P.1051–1094.
- 7 Rast R., Sahota D.S. The Borel complexity of isomorphism for o-minimal theories // The Journal of Symbolic Logic. –2017. – Vol. 82, №2. – P. 453-473.
- 8 Macpherson D., Marker D., Steinhorn Ch. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of the American Mathematical Society. – 2000. – Vol. 352. – P. 5435–5483.
- 9 Macpherson H.D., Steinhorn Ch. On variants of o-minimality // Annals of Pure and Applied Logic. –1996. – Vol.79, № 2. – P.165–209.
- 10 Belegardek O., Petersil Y., Wagner F. Quasi-o-minimal structures // The Journal of Symbolic Logic. – 2000. –Vol. 65, № 3. –P.1115-1132.
- 11 Newelski L., Wencel R. Definable sets in Boolean ordered o-minimal structures. // The Journal of Symbolic Logic. – 2001. –Vol.66, № 4. –P.1821–1836.
- 12 Wencel R. Definable sets in Boolean ordered o-minimal structures. II // The Journal of Symbolic Logic. –2003. Vol. 68, №1. –P. 35–51.
- 13 Glass A., Macintyre A., Point F. Free abelian lattice-ordered groups // Annals of Pure and Applied Logic. –2005. – Vol.134, № 2. –P.265–283.
- 14 Kulpeshov B.Sh., Macpherson H.D. Minimality conditions on circularly ordered structures // Mathematical Logic Quarterly. –2005. – Vol.51, № 4. – P. 377-399.
- 15 Байжанов Б.С., Вербовский В.В. Упорядоченно стабильные теории, Алгебра и Логика. – 2011. Т. 50, № 3. – С. 303-325.
- 16 Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some their properties // The Journal of Symbolic Logic. – 1998. –Vol.63, № 4. – P. 1511-1528.
- 17 Cluckers R., Leenknegt E. A version of p-adic minimality // The Journal of Symbolic Logic. – 2012. Vol.77, № 2– P. 621–630.
- 18 Кудайбергенов К.Ж. Обобщение о-минимальности на частичные порядки // Математические труды. –2012. –Т.15, №1. – С. 86-108.
- 19 Wencel R. On the strong cell decomposition for weakly o-minimal structures // Mathematical Logic Quarterly. – 2013. –Vol. 59, №6. –P. 452-470.
- 20 D'Aquino P., Kuhlmann S. A note of  $\aleph_\alpha$ -saturated o-minimal enrichments

of real closed fields // Algebra and Logic. – 2016. – Vol.54, № 6. – P. 502-506.

21 Moconja S., Tanovic P. Stationarily ordered types and the number of countable models, Annals of Pure and Applied Logic. – 2020. Vol.171, № 3. – P.102.

22 Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Алгебры распределений бинарных формул в счетно категоричных слабо о-минимальных структурах, Алгебра и Логика. – 2017. – Т.56, №1. – С. 20-54.

23 Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш. Судоплатов С.В., Об алгебрах распределений бинарных изолирующих формул для вполне о-минимальных теорий // Алгебра и Логика. – 2018. –Т. 57, № 6. – С.662-683.

24 Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic. –2001. –Vol.66. –P.1382-1414.

25 Апрефьев Р.Д. О свойстве монотонности слабо о-минимальных моделей // Algebra and Model Theory (A.G. Pinus and K.N. Ponomaryov, editors). – Novosibirsk: 1997. – P. 8-15.

26 Verbovskiy V.V. Non-uniformly weakly o-minimal group // Algebra and Model Theory 3, Collection of papers (A.G. Pinus and K.N. Ponomaryov, editors). – Novosibirsk: 2001. – P. 136-145.

27 Altayeva A.B., Kulpeshov B.Sh. On almost omega-categoricity for quite o-minimal theories // International Conference “Actual problems of Analysis, Differential equations and Algebra” dedicated to the 10<sup>th</sup> anniversary of the Eurasian Mathematical Journal, Eurasian National University, Astana: 2019. – P.168-169.

28 Алтаева А.Б., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Е-комбинации  $\aleph_0$ -категоричных линейных порядков // Вестник КазНУ, серия математика, механика, информатика. –2019. – № 3 (103). – С. 3-12.

29 Алтаева А.Б., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Свойства Е-комбинаций линейных порядков // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования, Алматы: 2020, С. 23-24.

30 Altayeva A.B., Kulpeshov B.Sh. Binariness of almost  $\omega$ -categorical quite o-minimal theories // Siberian Mathematical Journal, volume 61, No. 3, 2020, pp. 379-390.

31 Алтаева А.Б., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Об алгебрах формул для почти омега-категоричных слабо о-минимальных теорий // Матер. междунар. конф. «Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке», посвященной 75-летию профессора Е.Ы. Бидайбекова и 35-летию школьной информатики. – Алматы, 2020. – С. 41-46.

32 Алтаева А.Б., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Об  $\aleph_0$ -категоричности Е-комбинации линейных порядков // Матер. междунар. конф. «Мальцевские Чтения». – Новосибирск: 2020. – С.212.

33 Altayeva A.B., Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. On algebras of binary formulas for almost omega-categorical weakly o-minimal theories // Collection of abstracts of International conference “Mal’tsev Meeting”. – Novosibirsk: 2020. – P.

34 Altayeva A.B., Kulpeshov B.Sh. On almost omega-categoricity of weakly o-minimal theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2021. – Vol.18, №1. – P. 247-254.

35 Алтаева А.Б., Кулпешов Б.Ш. Почти омега-категоричность слабо о-минимальных теорий с малым счетным спектром // Матер. междунар. конф.: Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 75-летию академика НАН РК Кальменова Т.Ш. – Алматы: 2021. – С. 112-113.

36 Altayeva A., Kulpeshov B., Sudoplatov S. On algebras of binary formulas for almost  $\omega$ -categorical weakly o-minimal theories // Logic Colloquium 2021 (book of abstracts). – Adam Mickiewics University in Poznan. – Poland: 2021. – P. 134.

37 Алтаева А.Б., Кулпешов Б.Ш. О критерии почти бинарности слабо циклически минимальных теорий // Матер. междунар. конф. «Мальцевские Чтения». – Новосибирск: 2021. – С. 143.

38 Altayeva A.B., Kulpeshov B.Sh. Almost binarity of countably categorical weakly circularly minimal structures // Mathematical Notes. – 2021. – Vol. 110, № 6. – P. 813-829.

39 Altayeva A.B., Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions of binary isolating formulas for almost  $\omega$ -categorical weakly o-minimal theories // Algebra and Logic. – 2021. – Vol. 60, № 4. – P. 241-262.

40 Altayeva A.B., Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. On algebras of binary formulas for almost  $\omega$ -categorical weakly o-minimal theories // The Bulletin of Symbolic Logic. – 2022. – Vol. 28, № 2. – P. 283-284.

41 Алтаева А.Б. О запросах баз данных над слабо о-минимальной областью с малым счетным спектром // Вестник Казахстанско-Британского технического университета. – 2022. – Т.19, № 2. – С. 6-12.

42 Кулпешов Б.Ш. Ранг выпуклости и ортогональность в слабо о-минимальных теориях // Известия НАН РК, серия физико-математическая. – 2003. – Т.227. – С. 26-31.

43 Кулпешов Б.Ш. Счетно-категоричные вполне о-минимальные теории // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – Новосибирск, 2011. – Т.11, № 1. – С. 45-57.

44 Емельянов Д.Ю., Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Об алгебрах распределений бинарных изолирующих формул для вполне о-минимальных теорий // Алгебра и Логика. – 2018.- Т. 57, № 6. - С. 662–683.

45 Ikeda K., Pillay A., Tsuboi. On theories having three countable models // Mathematical Logic Quarterly, volume 44, issue 2, 1998, pp. 161–166.

46 Судоплатов С.В. Классификация счетных моделей полных теорий. Новосибирск: 2018. – № 1,2.

47 Кулпешов Б.Ш., Судоплатов С.В. Линейно упорядоченные теории, близкие к счетно категоричным // Математические заметки. – 2017. – Т.101, №3. – С. 413–424.

48 Woodrow R.E. Theories with a finite number of countable models and a

small language. // Thesis, Simon Fraser University. – 1976.

49 Herwig B., Macpherson H.D., Martin G., Nurtazin A., Truss J.K. On  $\aleph_0$ -categorical weakly o-minimal structures // Annals of Pure and Applied Logic. – 2000. – Vol.101, №1. – P. 65-93.

50 Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Vaught's conjecture for quite o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic. – 2017. – Vol.168, №1. – P.129-149.

51 Alibek A., Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh., Zambarnaya T.S. Vaught's conjecture for weakly o-minimal theories of convexity rank 1 // Annals of Pure and Applied Logic. – 2018. – Vol.169, №11. – P.1190-1209.

52 Kulpeshov B.Sh. Vaught's conjecture for weakly o-minimal theories of finite convexity rank // Izvestiya: Mathematics. – 2020. – Vol. 84, №2. – P. 324-347.

53 Kulpeshov B.Sh. Maximality of the countable spectrum in small quite o-minimal theories // Algebra and Logic. – 2019. – Vol. 58, №2. – P.137-143.

54 Kulpeshov B.Sh. Criterion for binarity of  $\aleph_0$ -categorical weakly o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic. – 2007. – Vol. 45, №3. – P. 354-367.

55 Baizhanov B.S. Orthogonality of one-types in weakly o-minimal theories // Algebra and Model Theory II, (A.G. Pinus and K.N. Ponomaryov, editors), Novosibirsk State Technical University. – 1999. – P.3–28.

56 Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh. On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories // Mathematical Logic in Asia: Proceedings of the 9th Asian Logic Conference, Singapore: World Scientific. – 2006. – P.31-40.

57 Mayer L.L. Vaught's conjecture for o-minimal theories // The Journal of Symbolic Logic. – 1988. – Vol. 53. – P.146-159.

58 Kulpeshov B.Sh. Binary types in  $\aleph_0$ -categorical weakly o-minimal theories // Mathematical Logic Quarterly. – 2011. – Vol. 57. – P. 246-255.

59 Shulepov I.V., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2014. – Vol.11. – P. 380–407.

60 Вербовский В.В. О глубине функций слабо о-минимальных структур и пример слабо о-минимальной структуры без слабо о-минимальной теории // Proceedings of Informatics and Control Problems Institute. – 1996. – С. 207-216.

61 Verbovskiy V.V. On formula depth of weakly o-minimal structures // Algebra and Model Theory, (A.G. Pinus and K.N. Ponomaryov, editors). – Novosibirsk, 1997. – P. 209–223.

62 Bhattacharjee M., Macpherson H.D., Moller R.G., Neumann P.M. Notes on Infinite Permutation Groups // Lecture Notes in Mathematics 1698, Springer. – 1998. – P.202.

63 Kulpeshov B.Sh. On  $\aleph_0$ -categorical weakly circularly minimal structures // Mathematical Logic Quarterly. – 2006. – Vol.52, №6. – P.555-574.

64 Кулпешов Б.Ш. Определимые функции в  $\aleph_0$ -категоричных слабо циклически минимальных структурах // Сибирский математический журнал. – 2009. – Vol.50, №2. – P.356-379.

65 Кулпешов Б.Ш. О бинарности  $\aleph_0$ -категоричности слабо о-минимальных теорий // Алгебра и логика. – 2005. – Vol.44, № 4. – С. 459-473.

66 Кулпешов Б.Ш. Бинарность  $\aleph_0$ -категоричных слабо о-минимальных теорий ранга выпуклости 1 // Сибирские электронные математические известия. –2006. – Vol.3. – С.185-196.

67 Кулпешов Б.Ш., Алтаева А.Б. Эквивалентность-генерирующие формулы в слабо циклически минимальных структурах // Доклады НАН РК. – 2014. – № 2. – С. 5-10.

68. Rosenstein J.G.  $\aleph_0$ -categoricity of linear orderings // Fundamenta Mathematicae. – 1969. – Vol. 64. – P. 1-5.

69. Alex Wilkie. O-minimal structures // ResearchGate Bourbali Wilkie

70. Richard Rast, Davender Sahota // The borel complexity of isomorphism for o-minimal theories. –2017. –Vol.82, №2. – P. 453-473.

71. K.Zh.Kudaibergenov, Generalizations of o-minimality to partial orders // Mathematical Proceedings. – 2012. – Vol. 15, №1. – P. 86-108.